Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 16.12.2008

10. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 48 :
Zeigen Sie: Die Sinus-Reihe konvergiert gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall, nicht aber auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 49 :
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^j$$

punktweise für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, aber auf $[-1,1]$ nicht gleichmäßig konvergiert. Berechnen Sie $f(x)$. Ist die Funktion stetig?

Aufgabe 50 :
Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist.
Hinweis: Additionstheorem.

Aufgabe 51 :
Zeigen Sie: Falls eine Folge von gleichmäßig stetigen Funktionen gleichmäßig konvergiert, so ist auch die Grenzfunktion gleichmäßig stetig.

Aufgabe 52 :
Die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R} (n = 1, 2, 3, \dots)$ seien alle Lipschitz-stetig mit derselben Konstante L, und die Funktionenfolge konvergiere punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) f ist ebenfalls Lipschitz-stetig mit Konstante L.

(b) (f_n) konvergiert sogar gleichmäßig gegen f.

Hinweis zu (b): Betrachten Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ die Funktionswerte in den endlich vielen Punkten $a, a+\varepsilon, a+2\varepsilon, \dots,$ bis b.

Aufgabe 53 :
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periode T, dass heisst: $f(x) = f(x+T)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Abgabe in der LINEAREN ALGEBRA-Vorlesungspause am 07.01.2009, Besprechung in den Übungen

Wir wünschen Ihnen allen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!