Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 13.01.2009

12. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 60 :
Seien $a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: Wenn $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geq n$ für alle reellen x, dann ist $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$.

Aufgabe 61 :
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf [a,b] und differenzierbar auf (a, b), mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie:
Wenn $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Aufgabe 62 :
Zeigen Sie:

$$0 < \ln\ln(k+1) - \ln\ln k < \frac{1}{k \cdot \ln k} \qquad \text{für alle natürlichen Zahlen } k \geq 2 \quad .$$

Aufgabe 63 :
Bestimmen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}.$$

Aufgabe 64 :
Bestimmen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x.$$

Aufgabe 65 :
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte, falls Sie existieren:

$$\lim_{x\to 0+} x^x, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{1/x}.$$

Abgabe in der Vorlesungspause am 20.01.2009, Besprechung in den Übungen