Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 04.11.2008

4. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 17 :
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument der folgenden komplexen Zahlen. Geben Sie auch jeweils die konjugiert komplexe Zahl an und skizzieren Sie die Zahlen in der komplexen Ebene:

$$i, \quad -i, \quad e^{i\pi}, \quad 1-2i, \quad 3e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

Aufgabe 18 :
Berechnen Sie Summe, Produkt und Quotient von je zwei aufeinanderfolgenden Zahlen der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 19 :
Zeigen Sie, dass

$$\arctan x = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right).$$

Aufgabe 20 :
Geben Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$ an.

Aufgabe 21 :
Schreiben Sie das Polynom $z^4 - 8z$ als Produkt von Polynomen vom Grad 1.

Aufgabe 22 :
Sei

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots = (1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)(1+\alpha_3 z)\ldots$$

und definieren Sie

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ , \quad S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots\ .$$

Schließen Sie – wie vor Ihnen Euler –, dass

$$S_1 = A_1\ , \quad S_2 = A_1 S_1 - 2A_2\ ,$$

und leiten Sie somit aus Eulers Produktformel für den Sinus ab, dass

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}\ , \quad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Abgabe in der Vorlesungspause am 11.11.2008, Besprechung in den Übungen