Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 28.4.2009

2. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 7 :
Zeigen Sie für $M \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{M} &= \{x \in \mathbb{R}^n | M \text{ ist Umgebung von } x\}\ , \\ \overline{M} &= \{x \in \mathbb{R}^n | M \text{ hat nichtleeren Durchschnitt mit jeder Umgebung von } x\}\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 8 :
Zeigen Sie für $A, B \subset \mathbb{R}^n$:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}\ , \qquad (A \cap B)^\circ = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}\ .$$

Geben Sie Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ an, für die

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}\ , \qquad (A \cup B)^\circ \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}\ .$$

Aufgabe 9 :
Seien M, X Mengen mit $M \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Die Menge M heißt offen in X, falls es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $M = U \cap X$.

(a) Geben sie ein M und ein X an, sodass M offen in X, aber nicht offen in $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Zeigen Sie: Ist X offen in $\mathbb{R}^n$, so sind die in X offenen Mengen genau die in $\mathbb{R}^n$ offenen Teilmengen von X.

Aufgabe 10 :
Es sei (K_k) eine Folge nichtleerer kompakter Mengen mit $K_k \supset K_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß der Durchschnitt $\bigcap_{k \geq 1} K_k$ nichtleer und kompakt ist.

Aufgabe 11 :
Seine $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass auch die Menge

$$X + Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}$$

kompakt ist.

Aufgabe 12 :
Gegeben sei die Familie offener Mengen $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $U_k := \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right)$ und eine Menge M:

(a) $M = (0, 1)\,,$

(b) $M = [0, 1]\,,$

(c) $M = [\varepsilon, 1 - \varepsilon]\ ,$ mit $0 < \varepsilon < 1/2\,.$

Gibt es $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{N}$, sodass $M \subset U_{k_1} \cup \ldots \cup U_{k_r}$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Abgabe in der Vorlesungspause am 5.5.2009,
Besprechung in den Übungen am 7.5.2009 bzw. 15.5.2009