IV. De maximis & minimis

Fermat 1638

Newton, Leibniz, Jac. und Joh. Bernoulli ~ 1690

Euler ab 1734

Lagrange ab 1759

1 Lokale Maxima und Minima

Sit: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen , $x_0 \in U$

Falls es eine Umgebung U_0 von x_0 gibt, sodaß für alle $x \in U_0 \setminus \{x_0\}$

$f(x) \leq f(x_0)$ gilt, so heißt x_0 lokales Maximum von f

$<$ — " — strenges lokales Maximum

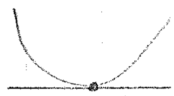
$\geq$ lokales Minimum

$>$ strenges — " —

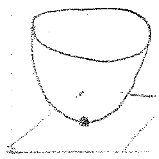
klar: x_0 (strenges) lokales Maximum von f

$\Longleftrightarrow$ x_0 (strenges) lokales Minimum von $-f$

betrachte daher i.f. nur Minima



n=1



n=2

Satz 1: (notwendige Bedingung für lokales Minimum)
Sei $f: U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar.
Falls x_0 lokales Minimum von f, gilt

$$\nabla f(x_0) = 0 \qquad \left(\text{anders: } f'(x_0) = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0 \right)$$

Beweis: (a) $n=1$ (Erinnerung)

$$\left.\begin{array}{ll} f(x) - f(x_0) \geq 0 & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ \| \text{ MWS} & \\ f'(\xi)(x - x_0) & \exists \xi \text{ zw. } x \text{ und } x_0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{ll} f'(\xi) \geq 0 & \xi > x_0 \\ f'(\xi) \leq 0 & \xi < x_0 \end{array}\right\} \underset{f' \text{ stetig}}{\Rightarrow} f'(x_0)$$

(b) allgemeines n: betrachte $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$, $v \in \mathbb{R}^n$ bel.

φ hat lokales Minimum in 0

$$\underset{(a)}{\Longrightarrow} \quad 0 = \varphi'(0) = f'(x_0)v = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

speziell für $v = \nabla f(x_0)$: $\|\nabla f(x_0)\|_2^2 = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$ $\square$

für hinreichende Bedingung brauche 2. Ableitung von f

$$f''(x_0)(u,v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j = u^T H(x_0) v$$

mit
$$H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
<u>Hessematrix</u>

Bez: $H(x) = \nabla^2 f(x) = D^2 f(x)$

für $f \in C^2(U)$ ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, somit $\nabla^2 f(x)$ symmetrische Matrix

(Kap. III, §8)

<u>Satz 2:</u> (hinreichende Bedingung für lokales Minimum)

Sei $f \in C^2(U)$. Falls (Lagrange 1759: n=2)

$$\nabla f(x_0) = 0 \quad \text{und}$$

$\nabla^2 f(x_0)$ positiv definit (d.h. $v^T \nabla^2 f(x_0) v > 0 \ \forall \underset{\neq 0}{v} \in \mathbb{R}^n$)

ist x_0 strenges lokales Minimum von f.

<u>Beweis:</u> (a) nehmen an: $\exists$ Umgebung U_0 von x_0, sodaß

(*) $\forall x \in U_0$: $\nabla^2 f(x)$ positiv definit

Dies wird in Teil (b) des Beweises nachgewiesen.

nehmen $\overset{\circ}{\underset{\neq}{h}} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\|$ so klein, daß Strecke $[x_0, x_0+h] \subset U_0$

verwenden Taylor-Formel mit $k=1$:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)h}_{=0 \text{ nach VS}} + \int_0^1 (1-t)\underbrace{f''(x_0+th)(h,h)}_{\substack{\| \\ h^T \nabla^2 f(x_0+th)h > 0 \\ \text{nach}(*)}} dt > 0$$

somit x_0 strenges lokales Minimum

(B) $F(x,v) := v^T \nabla^2 f(x) v$ für $v \in K := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \|w\|_2 = 1\}$
$x \in \overline{B}_r(x_0)$ (r so, daß $\overline{B}_r(x_0) \subset U$

$F : \underbrace{\overline{B}_r(x_0) \times K}_{\text{kompakt}} \to \mathbb{R}$ stetig, daher glm. stetig

$$F(x,v) \geq F(x_0,v) - |F(x,v) - F(x_0,v)|$$

nach Satz vom Minimum (Kap. II, §4):

$\exists v_0 \in K : \quad F(x_0,v) \geq F(x_0,v_0) \overset{VS}{>} 0$

wegen glm. Stetigkeit : zu $\varepsilon := \frac{1}{2} F(x_0,v_0)$ gibt es $\delta > 0$, sodaß

$\forall x, \|x-x_0\| < \delta \quad \forall v \in K : \quad |F(x,v) - F(x_0,v)| < \varepsilon$

somit $\quad F(x,v) \geq \underbrace{F(x_0,v_0)}_{2\varepsilon} - \varepsilon = \varepsilon > 0 \qquad \forall v \in K \quad \forall x \in U_0 := B_\delta(x$

d.h. $v^T \nabla^2 f(x) v > 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_2 = 1 \qquad \forall x \in U_0$

$\Rightarrow (*)$

$\square$

Wie überprüft man, ob $\nabla^2 f(x_0)$ positiv definit ist?

Einschub: Positiv definite Matrizen

Satz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ($A = A^T$). Äquivalent sind:

(a) A ist positiv definit, d.h., $v^T A v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$

(b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(c) $\exists\ B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar: $\quad A = BB^T$

(d) $\exists\ L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere Dreiecksmatrix mit $l_{ii} > 0\ \forall i$,
sodaß $A = LL^T$ (Choleski-Zerlegung)

Beweis: zeige (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a), (c) $\Leftrightarrow$ (d)

(a) $\Rightarrow$ (b) Sei v Eigenvektor zu Eigenwert λ von A: $\quad Av = \lambda v, \quad v \neq 0$

$$\Rightarrow \quad 0 \underset{(a)}{<} v^T A v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0$$

(b) $\Rightarrow$ (c) wissen: A durch orthogonale Matrix diagonalisierbar

$A = Q \Lambda Q^T$, $\quad Q$ orth. $(Q^TQ = QQ^T = I)$, $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

EW $\lambda_i > 0$ nach (b)

$$\Lambda^{1/2} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

setze $B = Q\Lambda^{1/2}Q^T = B^T$, ist invertierbar: $B^{-1} = Q\left(\Lambda^{1/2}\right)^{-1}Q^T$

$BB^T = B^2 = Q\Lambda^{1/2}\underbrace{Q^TQ}\Lambda^{1/2}Q^T = Q\Lambda Q^T = A$

(c) $\Rightarrow$ (a) $\quad v^TAv = v^TBB^Tv = (B^Tv)^T(B^Tv) = \|B^Tv\|_2^2 \geq 0$

und $\|B^Tv\|_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B^Tv = 0 \quad \underset{B^T \text{ inv.}}{\Longrightarrow} \quad v = 0$

(c) $\Rightarrow$ (d) zerlege $B^T = QR$ mit Q orthogonal, $R = \begin{pmatrix} r_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & r_{nn} \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix $r_{ii} > 0$

(aus Gram-Schmidt-Orthogonalisierung der Spalten von B)

$A \underset{(c)}{=} BB^T = R^TQ^TQR = R^TR$, setze $L = R^T$

(d) $\Rightarrow$ (c) klar (L invertierbar) $\square$

überprüfe mit (d), ob A pos. def.:

Ansatz: $A = LL^T$ $\quad L = \begin{pmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$

1. Zeile × 1. Spalte: $a_{11} = l_{11}^2 \implies l_{11} = \sqrt{a_{11}}$

(falls $a_{11} > 0$, sonst A nicht pos. def.)

k. Zeile × 1. Spalte: $a_{k1} = \underline{l_{k1}}\, l_{11} \longrightarrow$ bestimme l_{k1}

2. Zeile × 2. Sp.: $a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$

$\implies l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$, falls $a_{22} - l_{21}^2 > 0$

(sonst A nicht pos. def.)

k. Z. × 2. Sp.: $a_{k2} = l_{k1} l_{21} + \underline{l_{k2}}\, l_{22} \longrightarrow l_{k2}$

usw.

Bsp: $n = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad a_{12} = a_{21}$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad \text{falls } a_{11} > 0$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}}}, \quad \text{falls } a_{22}a_{11} - a_{21}^2 > 0$$

erhalte: symm. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist positiv definit $\iff \begin{cases} a_{11} > 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{21}^2 > 0 \\ \quad (= \det A) \end{cases}$

Satz 3: (2. notwendige Bedingung) Sei $f \in C^2(U)$.
Falls x_0 lokales Minimum von f, so gilt $\nabla f(x_0) = 0$ und
$\nabla^2 f(x_0)$ ist positiv semidefinit (d.h. $v^T \nabla^2 f(x_0) v \geq 0 \ \forall v \in$

Beweis: $0 \leq f(x_0 + \varepsilon v) - f(x_0) = \overset{0}{\cancel{f'(x_0)}}\varepsilon v + \varepsilon^2 \int_0^1 (1-t)\, v^T \nabla^2 f(x_0 + t\varepsilon v) v \, d$

dividiere durch ε^2, lasse $\varepsilon \to 0$, erhalte Bch. $\square$

Bem: x_0 heißt Sattelpunkt, falls $\nabla f(x_0) = 0$ und $\nabla^2 f(x_0)$ weder pos. noch neg. semidef.

2 Lokale Maxima und Minima unter Nebenbedingungen

Sit.: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen , $x_0 \in U$

$f : U \to \mathbb{R}$

$g : U \to \mathbb{R}^m$ $\quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}$ $\quad M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$

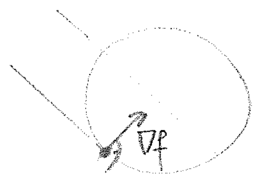
betrachte Minima von $f|_M$

x_0 heißt <u>lokales Minimum von f unter der Nebenbed.</u> $g(x)=0$, falls $g(x_0) = 0$ und falls es eine Umgebung U_0 von x_0 gibt, sodaß

$$\forall x \in U_0 \text{ mit } g(x) = 0 : \quad f(x) \geq f(x_0)$$

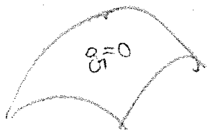
<u>Bsp</u>: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

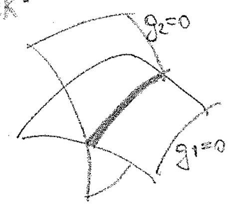
$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$



typisch: $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x) = 0\}$ Fläche in $\mathbb{R}^3$

$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(x) = 0, g_2(x) = 0\}$ Kurve in $\mathbb{R}^3$





<u>Satz</u>: (notwendige Bedingung)

Seien $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar

$\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_m(x_0)$ seien linear unabhängig $\quad (m \leq n)$

Falls x_0 lokales Minimum von f unter NB $g(x) = 0$,

gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, sodaß

$$\nabla f(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0$$

(λ_i heißen Lagrange-Multiplikatoren.)

Bem: zusammen mit $g(x_0) = 0$ $\quad n+m$ Gleichungen in $n+m$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$

Bem: $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ eindeutig bestimmt (wegen l.U. der $\nabla g_i(x_0)$)

brauchen Hilfsresultat aus linearer Algebra:

für Unterraum $V \leq \mathbb{R}^n$ bez. $V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u,v\rangle = 0 \ \forall v \in V\}$

wissen: $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$ | $\langle \cdot,\cdot \rangle$ euklid' Skp.

für Matrix $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\operatorname{Ker} G = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Gv = 0\} \qquad \text{Kern von } G$$

$$\operatorname{Im} G^T = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u = G^T\mu \text{ für ein } \mu \in \mathbb{R}^m\} \qquad \text{Bild von } G$$

<u>HS1:</u> $(\operatorname{Ker} G)^\perp = \operatorname{Im} G^T$

<u>Beweis:</u> Sei $u = G^T\mu \in \operatorname{Im} G^T$, $v \in \operatorname{Ker} G$

$$\langle u,v\rangle = u^Tv = \mu^T \underbrace{Gv}_{} = 0$$

daher $\operatorname{Im} G^T \subset (\operatorname{Ker} G)^\perp$

$\dim(\operatorname{Ker} G)^\perp = n - \dim \operatorname{Ker} G = \operatorname{Rang} G = \operatorname{Rang} G^T = \dim \operatorname{Im} G^T$

somit $\operatorname{Im} G^T = (\operatorname{Ker} G)^\perp$ $\square$

$v \in \mathbb{R}^n$ heißt <u>Tangentialvektor</u> an $M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ in x_0, falls es einen stetig diffbaren Weg $x: I \to M$ (I offenes Intervall um 0) gibt, sodaß

$$\left.\begin{aligned} g(x(t)) &= 0 \quad \forall t \in I \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = v \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

$T_{x_0}M$ bezeichne die Menge aller Tangentialvektoren an M in x_0.

<u>HS2:</u> $T_{x_0}M = \operatorname{Ker} G$, wobei $G = Dg(x_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$

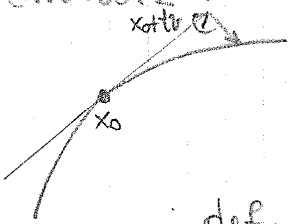
Bem: $T_{x_0}M$ ist also Vektorraum, heißt <u>Tangentialraum</u> an M in x_0.

<u>Beweis:</u> $(\subseteq)$ Sei $x: I \to M$ stetig diffbarer Weg mit $(*)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(x(t)) = Dg(x_0)\,\dot{x}(0) = Gv \quad \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} G$$

(2) zeige: zu jedem $v \in \operatorname{Ker} G$ gibt es stetig diffbaren Weg $x: I \to \mathcal{M}$ mit $(*)$

Ansatz: $x(t) = x_0 + \underbrace{tv}_{\in \operatorname{Ker} G} + u(t)$ mit $u(t) \in (\operatorname{Ker} G)^\perp \underset{HS1}{=} \operatorname{Im} G^T$



$u = G^T \mu$

def. $\gamma(t,\mu) = g(x_0 + tv + G^T\mu)$

haben $\gamma(0,0) = g(x_0) = 0$

$\frac{\partial \gamma}{\partial \mu}(0,0) = \underset{m \times m}{GG^T}$ invertierbar, denn:

$GG^T\mu = 0 \Rightarrow 0 = \mu^T GG^T \mu = \|G^T\mu\|_2^2$

$\Rightarrow 0 = G^T\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(x_0) \underset{\nabla g_i(x_0) \text{ l.u.}}{\Longrightarrow} \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$

nach Satz über implizite Funktionen: $\exists$ offenes Intervall I um 0

$\exists\, \mu: I \to \mathbb{R}^m$ stetig diffbar mit $\mu(0) = 0$ und

$\gamma(t, \mu(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

$\quad \| $

$g(x_0 + tv + G^T\mu(t))$

$0 = \frac{\partial \gamma}{\partial t}(0,0) + \frac{\partial \gamma}{\partial \mu}(0,0)\dot\mu(0) = \overset{0}{\cancel{Gv}} + GG^T\dot\mu(0) \Rightarrow \dot\mu(0) = 0$

$\Rightarrow x(t) := x_0 + tv + G^T\mu(t)$ erfüllt $(*)$ $\square$

Beweis des Satzes: Sei x_0 lokales Minimum von f unter NB $g(x)=0$

Sei $v \in T_{x_0}\mathcal{M} \underset{HS2}{=} \operatorname{Ker} G$, sei $x: I \to \mathcal{M}$ stetig diffbarer Weg mit (

$\Rightarrow t = 0$ ist lokales Minimum von $\varphi(t) := f(x(t))$

$\Rightarrow 0 = \dot\varphi(0) = f'(x_0)v = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$, gilt $\forall v \in \operatorname{Ker} G$

$\Rightarrow \nabla f(x_0) \in (\operatorname{Ker} G)^\perp \underset{HS1}{=} \operatorname{Im} G^T$

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^m : \nabla f(x_0) = G^T\lambda$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x_0)$ $\square$

Bem: geometrische Interpretation

Falls x_0 lokales Minimum (oder Maximum) von f unter NB $g(x)=0$, so steht $\nabla f(x_0)$ orthogonal auf alle Tangentialvektoren von $M = \{x \mid g(x) = 0\}$ in x_0.

Bem: Lagrange-Funktion

$(x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $\lambda_0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$ ist Sattelpunkt von

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_i \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = g_k$$

Bem: hinreichende Bedingung

$$v^T \left(\nabla^2 f(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 g_i(x_0) \right) v > 0 \qquad \forall v \underset{0}{\neq} \in T_{x_0} M$$

≥ 0 auch notwendig für Minimum unter NB

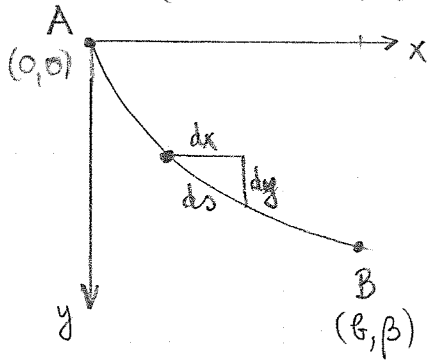
(ohne Beweis)

3 Variationsprobleme

bisher: minimiere Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher

jetzt: minimiere Funktionen von Kurven

Bsp: Brachystochrone, Joh. Bernoulli 1696
(Kurve der kürzesten Durchlaufzeit)



Teilchen unter Schwerkraft gleitet auf Kurve von A nach B

Wie muß Kurve sein, daß Laufzeit minimal

Geschwindigkeit: $v = \sqrt{2gy}$ (anachronistisch: Energie $\frac{mv^2}{2} - mgy = \text{const.} = 0$)

$v = \frac{ds}{dt}$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\, dx$$

Laufzeit $T = \int_0^T dt = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\, dx$ minimal unter allen Kurven von A nach B!

Problem: geg. $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y, y') \mapsto f(x, y, y')$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

suche $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$, sodaß

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx, \qquad F : C^1[a,b] \to \mathbb{R}$$

minimal unter allen stetig diffbaren Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{R}$ mit festen Endwerten α, β.

<u>Satz:</u> (notwendige Bedingungen) f sei stetig diffbar.
Ist $y \in C^2[a,b]$ Lösung des obigen Extremalproblems, so erfüllt y die <u>Euler' Differentialgleichungen</u> (Euler 1744)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

<u>Bem:</u> $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{(\partial y')^2} y'' = 0$

Differentialgleichung 2. Ordnung

<u>Beweis:</u> (nach Lagrange) betrachten für bel. $v \in C^1[a,b]$ mit $v(a) = v(b) = 0$ und t in Intervall um 0

$$\varphi(t) := F(y + tv) = \int_a^b f(x, y(x) + tv(x), y'(x) + tv'(x))\, dx$$

y Minimum von F $\Rightarrow$ 0 Minimum von φ $\Rightarrow$ $\dot\varphi(0) = 0$

$$0 = \dot\varphi(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_a^b f(x, y(x) + tv(x), y'(x) + tv'(x))\, dx$$

$$\underset{\text{III}, §10}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x, y(x) + tv(x), y'(x) + tv'(x))\, dx$$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x))\, v(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, v'(x) \right) dx$$

$$\underset{\text{p.I.}}{=} \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x)) \right\} v(x)\, dx \; +$$

$$+ \cancel{\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))\, v(x) \Big|_a^b}^{\,0}$$

gilt $\forall v \in C^1[a,b]$ mit $v(a) = v(b) = 0$

mit HS unten folgt Beh. $\square$

HS: (Fundamentallemma der Variationsrechnung)

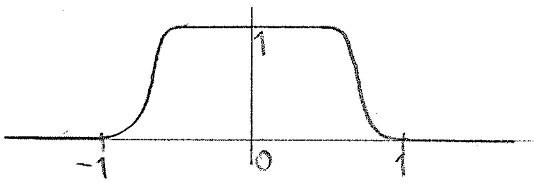
Sei $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\int_a^b u(x)\, v(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, v \in C^\infty[a,b] \text{ mit } v(a) = v(b) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$

Beweis: wissen aus Anal. I, Ü… : $\exists$ C^∞-Funktion $\phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ m

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



Sei $x_0 \in (a,b)$.

Setze $v(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$ mit $\varepsilon > 0$ klein (sodaß $\frac{x_0-a}{\varepsilon} > 1$, $\frac{b-x_0}{\varepsilon} >$

haben

$$0 \underset{VS}{=} \int_a^b u(x)\, \frac{1}{\varepsilon}\phi\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) dx \underset{\left(t = \frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)}{=} \int_{-1}^{1} u(x_0 + \varepsilon t)\, \phi(t)\, dt$$

$$\downarrow \quad \varepsilon \to 0 \qquad (\text{II}, 6$$

$$\int_{-1}^{1} u(x_0)\,\phi(t)\, dt = u(x_0) \underbrace{\int_{-1}^{1} \phi(t)\, dt}_{>0}$$

$$\Rightarrow \quad u(x_0) = 0, \quad \text{gilt } \forall x_0 \in (a,b)$$

da u stetig, ist auch $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ $\square$

HS: Falls f nicht von der Veränderlichen x abhängt, gilt für jede Lösung $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ der Euler' Dgln.

$$(*) \qquad f(y(x), y'(x)) - \frac{\partial f}{\partial y'}(y(x), y'(x))\, y'(x) = \text{const.} \qquad \forall x \in [a,b]$$

Beweis: differenzieren linke Seite nach x, lasse Argument von f weg

$$\frac{\partial f}{\partial y} y' + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y'} y''} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y'^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y' y'' - \cancel{\frac{\partial f}{\partial y'} y''}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y'' \right) y'$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Beh.} \qquad \square$$

Bsp: Brachystochrone $\quad f(y,y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$

Bed. (*): $\quad \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \dfrac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \cdot y' = \text{Const.}$

d.h. $\quad 1 + y'^2 - y'^2 = \text{Const.} \sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}$

erhalte $\quad y(1+y'^2) = c \qquad \left(c = \dfrac{1}{\text{Const.}^2} \right)$

$$y' = \sqrt{\frac{c}{y} - 1}$$

$$y' \sqrt{\frac{y}{c-y}} = 1 \qquad \Big| \int_0^b \% \, dx$$

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} \frac{dy}{dx} dx = \int \sqrt{\frac{y}{c-y}} dy =$$

subst. $\quad y = c \sin^2\varphi = \frac{c}{2}(1 - \cos 2\varphi)$

$\qquad dy = c \sin 2\varphi \, d\varphi = c\sqrt{1 - \cos^2 2\varphi} \, d\varphi$

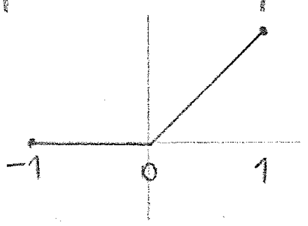
$$= \int \frac{\sqrt{1 - \cos 2\varphi}}{\cancel{\sqrt{1 + \cos 2\varphi}}} c \sqrt{1 - \cos 2\varphi} \cancel{\sqrt{1 + \cos 2\varphi}} \, d\varphi$$

$$= \int c(1 - \cos 2\varphi) d\varphi = c\varphi - \frac{c}{2} \sin 2\varphi$$

Parameterdarstellung der Lösungskurve: $\quad x = c\varphi - \frac{c}{2}\sin 2\varphi$, $\quad y = \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\cos 2\varphi \quad$ Zykloi

(Bestimme c, φ_1 so, daß $x(\varphi_1) = b$, $y(\varphi_1) = \beta$)

Bsp: (Weierstraß) $\int_{-1}^{1} y(x)^2 \left(1-y'(x)\right)^2 dx$ minimal!, $y(-1)=0$, $y(1)=1$



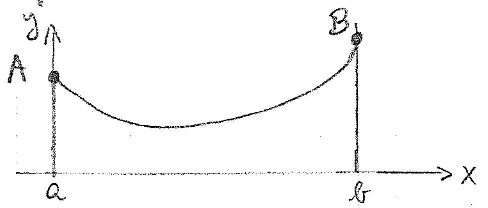
hat Lösung $y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

ist nicht diffbar in 0

Euler' Dgl: $y^2(1-y')(1+y') = \text{Const.}$ hat keine diffbare Lösung, die die Randbed. erfüllt!

4 Isoperimetrische Variationsprobleme (V.P. mit Integral-Nebenbed.)

Bsp: Kettenlinie (Leibniz, Joh. Bernoulli 1691)



Seil der Länge l, aufgehängt in Endp. A, B
Höhe $y(x)$?

Minimierung der potentiellen Energie $\longrightarrow$

$$\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \quad \text{minimal!}$$ unter Nebenbed.

$$\int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2} = l$$ und Randbed. $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$

Problem: geg. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $l, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

suche Funktion $y: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $y(a)=\alpha$, $y(b)=\beta$, sodaß

$$F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx \quad , \quad F: C^1[a,b] \to \mathbb{R}$$

minimal unter allen Funktionen mit denselben Randwerten und der Nebenbedingung

$$G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx = l$$

(iso = gleich
perimeter = Umf

Satz: (notwendige Bedingung) f, g seien stetig diffbar
$y \in C^2[a,b]$ sei Lösung des obigen isoperimetrischen Problems, und
es gelte $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}(x,y(x),y'(x)) \neq 0$ für ein $x \in [a,b]$

$\Longrightarrow$ Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodaß y die Euler-Lagrange' Differentialgln

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\%) - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}(\%) = \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y}(\%) - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}(\%)\right) \quad \forall x \in [a,b]$$

erfüllt (wobei $\%$ kurz für $(x,y(x),y'(x))$).

Bem: mit der Lagrange-Funktion $L = f - \lambda g$ gilt also

$$\frac{\partial L}{\partial y}(\%) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(\%) = 0$$

Beweis: nach VS (und Fundamentallemma) wissen
$\exists\, w \in C^1[a,b]$ mit $w(a) = w(b) = 0$, sodaß

$$\int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\%) - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}(\%)\right) w(x)\,dx \neq 0$$

betrachte für $\underset{\text{mit } v(a)=v(b)=0}{v \in C^1[a,b]}$ und für t, s in Intervall um 0

$$\varphi(t,s) := F(y + tv + sw)$$
$$\gamma(t,s) := G(y + tv + sw)$$

φ, γ stetig diffbar in Umgebung von $(0,0)$ und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(y+tv) \underset{\text{s. oben}}{=} \int_a^b \left\{\frac{\partial f}{\partial y}(\%) - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}(\%)\right\} v(x)\,dx$$

analog $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(0,0)$ (w statt v), $\frac{\partial \gamma}{\partial t}(0,0)$ (g statt f)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s}(0,0) = \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial y}(\%) - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}(\%)\right) w(x)\,dx \neq 0 \quad \text{nach Wahl von } w$$

y Lösung des isoperimetrischen Problems

$\Rightarrow$ $(0,0)$ Minimum von $\varphi(t,s)$ unter NB $\gamma(t,s) - \ell = 0$

nach Satz, §2: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla\varphi(0,0) = \lambda \nabla\gamma(0,0)$

d.h. $$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0,0) = \lambda \frac{\partial\gamma}{\partial t}(0,0)$$ und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}(0,0) = \lambda \underbrace{\frac{\partial\gamma}{\partial s}(0,0)}_{\neq 0}$$

in der 2. Gl. kommt v nicht vor, also ist λ unabh. von v

1. Gl.: $$\int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot) - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}(\cdot)\right\} v(x)\,dx = \lambda \int_a^b \left\{ \frac{\partial g}{\partial y}(\cdot) - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}(\cdot)\right\} v(x)\,dx$$

$(L = f - \lambda g)$

d.h. $$\int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot)\right\} v(x)\,dx = 0$$

gilt $\forall v \in C^1[a,b]$ mit $v(a) = v(b)$

nach Fundamentallemma: $\{\ldots\} = 0 \Rightarrow$ Beh. $\square$

Bsp: Kettenlinie $L(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2} - \lambda\sqrt{1+y'^2} = (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2}$

Euler-Lagrange' Dgln. in Gestalt $(*)$ des 2. HS von §3: für $z = y - \lambda$ gilt

$$z\sqrt{1+z'^2} - \frac{zz'}{\sqrt{1+z'^2}} z' = \text{Const.}$$

erhalte $$z(1+z'^2) - z\cdot z'^2 = \text{Const.}\sqrt{1+z'^2}$$

$$z^2 = C^2(1+z'^2) \qquad (C^2 = \text{Const.})$$

bzw. $$\frac{z'}{\sqrt{\frac{z^2}{C^2} - 1}} = 1 \quad \Big| \int \ldots dx$$

$$\Rightarrow \quad x = \int \frac{dz}{\sqrt{\frac{z^2}{C^2} - 1}} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{C \cancel{\sinh u}\, du}{\cancel{\sinh u}} = Cu + D$$

subst. $z = C\cosh u$, $dz = C \sinh u\, du$

$$x = Cu + D \qquad u = \frac{x-D}{C}$$

$$y - \lambda = z = C \cosh u = C \cosh\left(\frac{x-D}{C}\right)$$

erhalte $\quad y(x) = \lambda + C \cosh\left(\frac{x-D}{C}\right)$

bestimme Konstanten C, D, λ so, daß

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \ell$$