Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.04.2021

1. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 1: Zeigen Sie mithilfe eines Gegenbeispieles, dass die Rückrichtung in Teil b) von Satz 1 aus der Vorlesung im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn für alle $x_1 < x_2 < x_3$ aus (a, b) gilt, dass

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Aufgabe 3: Beweisen Sie die Ungleichung zwischen dem gewichteten harmonischen und geometrischen Mittel: Für beliebige positive Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ und positive $\theta_1, \ldots, \theta_n$ mit $\theta_1 + \ldots + \theta_n = 1$ gilt

$$\frac{1}{\left(\frac{\theta_1}{x_1} + \ldots + \frac{\theta_n}{x_n}\right)} \leq x_1^{\theta_1} \ldots x_n^{\theta_n} \,.$$

Hinweis: Konvexität von $-\ln x$ auf $(0, \infty)$.

Aufgabe 4: Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie die Höldersche Ungleichung für Integrale: Für stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{1/q} .$$

Hinweis: Riemann-Summen.

Aufgabe 5: Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\|_{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^{1/2} \right)^2$$

keine Norm definiert wird, da die Dreiecksungleichung nicht gilt.

Aufgabe 6: Eine Funktion $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass

i) $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$

ii) $d(x, y) = d(y, x),$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$

Zeigen Sie, dass jede Norm $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mittels $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik induziert.

Abgabe über URM bis zum 27.04.2021, 12:00
Besprechung in den Übungen vom 03.-05.05.2021.