Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich Tübingen, den 04.05.2021

3. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 13: Seien M, X Mengen mit $M \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Die Menge M heißt offen in X, falls es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $M = U \cap X$. Geben Sie zunächst M und X an, sodass M offen in X aber nicht offen in $\mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie dann, dass für offenes X die in X offenen Mengen genau die in $\mathbb{R}^n$ offenen Teilmengen von X sind.

Aufgabe 14: Es sei (K_k) eine Folge nicht leerer, kompakter Mengen mit $K_k \supset K_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $\bigcap_{k\geq 1} K_k$ nichtleer und kompakt ist.

Aufgabe 15: Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Zeigen Sie, dass auch die Menge

$$X + Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}$$

kompakt ist.

Aufgabe 16: Gegeben Sei die Familie offener Mengen $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $U_k := \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right)$ und eine Menge definiert als

i) $M = (0, 1)$,

ii) $M = [0, 1]$,

iii) $M = [\epsilon, 1 - \epsilon]$, mit beliebig aber festem $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$.

Gibt es $k_1, ..., k_r \in \mathbb{N}$ so, daß $M \subset U_{k_1} \cup ... \cup U_{k_r}$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 17: Sei auf $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in $x_0 \in X$ ist, falls für jede Folge $(x_k) \in X$ mit $x_k \to x_0$ gilt, dass $f(x_k) \to f(x_0)$.

Aufgabe 18: Untersuchen Sie, welche der beiden Funktionen sich zu einer stetigen Funktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ fortsetzen lassen:

i) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$;

ii) $u(x, y) = \frac{x^2-y}{x^2+y}$;

Hinweis: Young-Ungleichung (Aufgabe 1 auf Übungsblatt 0).

Abgabe über URM bis zum 11.05.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 17.-19.05.2021.