Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 18.05.2021

5. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 25: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend, und seien $w, z \in X$. Sei weiters $\gamma : [0,1] \to X$ ein Weg mit $\gamma(0) = w$ und $\gamma(1) = z$. Zeigen Sie, dass es endlich viele offene Kugeln $B_1, ..., B_r$ gibt mit $\gamma([0,1]) \subset B_1 \cup ... \cup B_r \subset X$.

Aufgabe 26: Zeigen Sie: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn ihr Graph

$$\{(x, f(x)) : x \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 27: Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^2 - 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 - 3x_1x_2^2 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(X) = X^2$, ist differenzierbar, und ihre Ableitung ist gegeben durch

$$f'(X)H = XH + HX \ .$$

Aufgabe 29: Zeigen Sie: Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so auch das Produkt fg. Berechnen Sie dessen Ableitung.

Aufgabe 30: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist aber die partiellen Ableitungen dort nicht stetig sind.

Abgabe über URM bis zum 01.06.2021, 12:00
Besprechung in den Übungen vom 07.-09.06.2021.