Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 15.06.2021

8. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 43: Geben Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^2$ um den Punkt $(1,1)$ an.

Aufgabe 44: Verwenden Sie das Taylorpolynom dritten Grades von $f(x,y) = x^y$ um $(1,1)$, um einen Näherungswert für $1.05^{1.02}$ berechnen. Geben Sie eine obere Abschätzung des Fehlers an.

Aufgabe 45: (Peano 1884, Annotazione N. 109)

Die Taylor-Formel mit Restterm in Zwischenwertform ist für Funktionen mehrerer Veränderlicher nur dann allgemein gültig, falls alle auftretenden partiellen Ableitungen stetig sind (anders als im eindimensionalen Fall). Zeigen Sie, daß für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Formel

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)h + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)k$$

mit $\xi = x_0 + \theta h,\ \eta = y_0 + \theta k$ falsch sein kann.
(Wählen Sie dazu $x_0 = y_0 = -a,\ h = k = a + b$).

Aufgabe 46: Seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y}\,, & \text{falls } y \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}\,, & \text{falls } y = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx\,.$$

Bestimmen Sie die Punkte, an denen g differentierbar ist und berechnen Sie g'.

Aufgabe 47: (Peano 1884, Annotazioni N. 133-136)

Zeigen Sie, daß für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

der Gradient in $(0,0)$ verschwindet, aber $(0,0)$ kein lokales Minimum ist. Zeigen Sie aber auch, daß die Funktion auf allen Geraden durch $(0,0)$ ein lokales Minimum hat.

Aufgabe 48: Sei $f(x,y,z) = \alpha x^2 e^y + y^2 e^z + z^2 e^x$. Für welche Werte von α ist $(0,0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum?

Abgabe über URM bis zum 22.06.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 28.06.-30.06.2021.