

11. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 61: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, wegzusammenhängende Menge, deren Rand eine Nullmenge ist. Seien $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g(x) \geq 0$ für alle $x \in A$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in A$, so dass

$$\int_A f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_A g(x)dx .$$

Aufgabe 62: Die Funktion $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ mit $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ stellt eine geschlossene Kurve (Kardioide) in Polarkoordinaten dar. Berechnen Sie den durch diese Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt.

Aufgabe 63: L sei eine symmetrische, positiv definite $n \times n$ -Matrix; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seien die Eigenwerte von L :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T L x \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\} .$$

Zeigen Sie: $\mu(A) = \mu(B) \cdot (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{-1/2}$.

Hinweis: Finden Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D mit $L = U^T D^2 U$.

Aufgabe 64: Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_1 \leq \|x\|_2 \leq r_2\}$, $\Phi : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(x) = \Phi(\|x\|_2)$. Zeigen Sie für $n = 3$:

$$\int_A f(x)dx = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \Phi(r)r^2 dr .$$

Wie sieht die entsprechende Formel für $n = 2$ aus?

Aufgabe 65: Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Kurven $xy = 2$, $xy = 4$, $xy^3 = 3$ und $xy^3 = 6$ eingeschlossenen Gebietes.

Hinweis: Betrachten Sie die Umkehrabbildung der Funktion $(x, y) \mapsto (xy, xy^3)$ und verwenden Sie die Transformationsformel.

Aufgabe 66: Sei $B_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $Q_R = \{(x, y) \mid |x| \leq R \text{ und } |y| \leq R\}$.

(a) Zeigen Sie: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R} \exp(-(x^2 + y^2)) d(x, y) = \pi$

(b) Folgern Sie aus (a): $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_R} \exp(-(x^2 + y^2)) d(x, y) = \pi$.

(c) Zeigen Sie: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$.

Hinweis: $\left(\int_{-R}^R \exp(-x^2) dx\right) \left(\int_{-R}^R \exp(-y^2) dy\right)$ als Doppelintegral auffassen.

**Abgabe über URM bis zum 13.07.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 19.07.-21.07.2021.**