Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.07.2021

13. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 73: Bestimmen Sie alle Maxima und Minima der Funktion $f(x,y) = x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

Lösung. Die zugehörige Lagrange-Funktion ist $L(x,y) = x^2 - y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Somit ist

$$\nabla L(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 2\lambda x \\ -2y - 2\lambda y \end{pmatrix}.$$

Somit ist die notwendige Bedingung an ein lokales Extremum

$$\begin{aligned} 2x(1-\lambda) &= 0 \\ -2y(1+\lambda) &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $x = 0$ oder $\lambda = 1$. Im Falle $x = 0$ folgt aus der Nebenbedingung, dass $y^2 = 1$, d. h. $y = \pm 1$. Außerdem ist $f(0, \pm 1) = -1$. Im Falle $\lambda = 1$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung, dass $y = 0$ und damit aus der Nebenbedingung, dass $x = \pm 1$ und $f(\pm 1, 0) = 1$.

Um zu begründen, dass es sich tatsächlich um Minima bzw. Maxima handelt, kann man zeigen, dass $-1 \leq f(x,y) \leq 1$ für alle (x,y) mit $x^2 + y^2 = 1$. Zunächst ergibt sich aus der Nebenbedingung, dass $x^2 = 1 - y^2 \leq 1$, d. h. $|x| \leq 1$ und analog $|y| \leq 1$. Somit ist einerseits $f(x,y) = x^2 - y^2 \leq x^2 \leq 1$ und andererseits $x^2 - y^2 \geq x^2 - 1 \geq -1$.

Also sind $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ Maxima, $(0, 1)$ und $(0, -1)$ Minima unter der gegebenen Nebenbedingung. □

Aufgabe 74: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante und $w(x,t) = f(x + at) + g(x - at)$. Zeigen Sie, dass w die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)$$

erfüllt.

Beweis. Zunächst ist

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(w,t) = f''(x + at) + g''(x - at)\,.$$

Außerdem ergibt sich aus der (eindimensionalen) Kettenregel, dass

$$\frac{d}{dt} f(x + at) + g(x - at) = af'(x + at) - ag'(x - at)$$

und daraus

$$\frac{d^2}{dt^2} f(x + at) + g(x - at) = a^2 f''(x + at) + a^2 g''(x - at)\,.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Aufgabe 75: Sei

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 > 0 \; , \; 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 3\}$$

und $f(x) = e^{x_1^2} e^{x_2^2}$. Berechnen Sie

$$\int_A f(x) dx \, .$$

Beweis. Die Bedingung $1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 3$ drückt aus, dass (x_1, x_2) auf einem Kreisring mit innerem Radius 1 und äußerem Radius $\sqrt{3}$ liegt, die Bedingung $x_2 > 0$, dass es nur ein halber Kreisring oberhalb der x_1-Achse ist. In Polarkoordinaten bedeutet das, dass $1 \leq r \leq \sqrt{3}$ und $0 \leq \varphi \leq \pi$. Außerdem ist $f(x) = e^{x_1^2} e^{x_2^2} = e^{x_1^2 + x_2^2}$. Wir verwenden den Transformationssatz mit Polarkoordinaten und erhalten

$$\int_A f(x) dx = \int_0^{\pi} \int_1^{\sqrt{3}} e^{r^2} r dr d\varphi \, .$$

Durch scharfes Hinsehen ($2re^{r^2}$ ist die Ableitung von e^{r^2}) oder durch Substitution $u = r^2$ erhält man eine Stammfunktion des Integranden. Rechnet man alles aus, erhält man

$$\int_A f(x) dx = \frac{\pi}{2}(e^3 - e) \, .$$

□

Aufgabe 76: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \, . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$ ist. Ist f stetig in $(0, 0)$?

Beweis. Wir berechnen $\partial_x f(0, 0)$ mit dem Differenzenquotienten:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \, .$$

Analog berechnet man $\partial_y f(0, 0) = 0$. Somit ist f partiell differenzierbar in $(0, 0)$.

Betrachte nun die Folge $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Dann konvergiert $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ aber

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \, .$$

Somit konvergiert $f(x_n, y_n)$ nicht gegen $f(0, 0) = 0$, d. h. f ist nicht stetig im Punkt $(0, 0)$.

Insbesondere folgt daraus auch, dass f nicht differenzierbar in $(0, 0)$ ist. □

Aufgabe 77: Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ die Oberfläche einer Kugel vom Radius r und sei $f(x, y, z) = z^2$. Berechnen Sie

$$\int_S f d\sigma \, .$$

Lösung. Die Oberfläche der Kugel kann mithilfe von Kugelkoordinaten beschrieben, d. h. durch die Abbildung

$$\varphi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(u) \\ r\sin(u)\cos(v) \\ r\sin(u)\sin(v) \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich für die partiellen Ableitungen

$$\partial_u \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} -r\sin(u) \\ r\cos(u)\cos(v) \\ r\cos(u)\sin(v) \end{pmatrix} \quad \partial_v \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sin(u)\sin(v) \\ r\sin(u)\cos(v) \end{pmatrix} .$$

Das Flächenelement kann berechnet werden durch $\sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)}$ oder $\|\partial_u\varphi \times \partial_v\varphi\|_2$. Mit $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ folgt

$$\partial_u \varphi(u, v) \times \partial_v \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} r^2\sin(u)\cos(v) \\ r^2\sin^2(u)\cos(v) \\ r^2\sin^2(u)\sin(v) \end{pmatrix} .$$

Mit einer mühseligen Rechnung und geschicktem Ausklammern berechnet man

$$\|\partial_u \varphi(u, v) \times \partial_v \varphi(u, v)\|_2^2 = r^4 \sin^2(u) ,$$

d. h. $d\sigma = r^2|\sin(u)|d(u, v)$. Da $\sin(u) \geq 0$ für $u \in [0, \pi]$ können die Betragsstriche weggelassen werden. Setzt man alles ein, erhält man

$$\begin{aligned} \int_S z^2 d\sigma &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2(u)\sin^2(v) r^2 \sin(u) dv du \\ &= r^4 \sin_0^{\pi} \sin^3(u) \int_0^{2\pi} \sin^2(v) dv du \\ &= r^4 \pi \int_0^{\pi} \sin^3(u) du = \frac{4}{3}\pi r^4 . \end{aligned}$$

□

Aufgabe 78: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \alpha(x^2 + y^2) + \beta(x^2 - y^4)$. Zeigen Sie, dass $\nabla f(0, 0) = 0$. Für welche Werte von α und β liegt ein lokales Maximum oder Minimum vor?

Beweis. Wir berechnen zunächst

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\alpha x + 2\beta x \\ 2\alpha y - 4\beta y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(\alpha + \beta) \\ 2y(\alpha - 2\beta y^2) \end{pmatrix} .$$

Insbesondere ist $\nabla f(0, 0) = 0$. Weiter berechnen wir die Hessematrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 2\alpha - 12\beta y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2(\alpha + \beta) & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix} .$$

Ist nun

- $\alpha > 0$ und $\alpha + \beta > 0$, also $\beta > -\alpha$, so ist $H_f(0, 0)$ positiv definit. In diesem Fall liegt ein lokales Minimum vor.
- $\alpha < 0$ und $\alpha + \beta < 0$, also $\beta < -\alpha$, so ist $H_f(0, 0)$ negativ definit. In diesem Fall liegt ein lokales Maximum vor.

- $\alpha > 0$ und $\alpha + \beta < 0$, also $\beta < -\alpha$, so ist $H_f(0,0)$ indefinit und es liegt ein Sattelpunkt vor.
- $\alpha < 0$ und $\alpha + \beta > 0$, also $\beta > -\alpha$, so liegt ebenfalls ein Sattelpunkt vor.

In den anderen Fällen ist zumindest mithilfe der Hessematrix keine Aussage möglich. Ist beispielsweise $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$, so liegt ein Sattelpunkt vor, da $x^2 - y^4$ in einer beliebig kleinen Umgebung von $(0,0)$ positive und negative Werte annimmt. Alle Fälle zu überprüfen ist aber nicht besonders aufschlussreich. $\square$

Bearbeitung freiwillig.