



Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021

Tübingen, 28.04.2021

Übungsblatt 2

Problem 1. Fixieren Sie ein $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, sowie ein $t_0 > 0$. Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig für alle $|t| \leq t_0$.

Problem 2. Sei $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, und

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|$$

die verwendete Operatornorm, mit euklidischer Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leq e^{\|\mathbf{A}\|t}.$$

Problem 3: Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$e^{\mathbf{A}} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Sei $\lambda = a + ib$. Zeigen Sie per Induktion, daß gilt:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & -\operatorname{Im}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{pmatrix}$$

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung in pdf-Format bis Mittwoch, den 05.05.2021, um 23.59 Uhr mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021 an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".