EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021 **Tübingen, 12.05.2021**

Übungsblatt 4

Problem 1. Sei $\mu > 0$. Klassifizieren Sie die Gleichgewichtspunkte der ODE $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ \mu x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 - x_3 \end{pmatrix} .$$

Für welchen Wert von μ ergeben sich zwei neue Gleichgewichtspunkte aus dem des Ursprungs?

Hinweis: Für $\mu > 1$ lauten die Eigenwerte an dem vom Ursprung verschiedenen Gleichgewichtspunkt $\lambda = -2$ und $\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5 - 4\mu})$.

Problem 2. Zeigen Sie, daß die stetige Abbildung $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ via

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1^2 \\ x_3 + \frac{x_1^2}{3} \end{pmatrix}$$

eine stetige Inverse $\mathbf{H}^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ besitzt, und die ODE $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

vermöge $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ in die Form $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ mit $A = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$ gebracht werden kann.

Problem 3. Betrachten Sie die ODE $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 - x_2^2 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix} .$$

Verwenden Sie drei Schritte der in der Vorlesung (am Montag) vorgestellten *sukzessiven Approximation*, mit $\mathbf{u}^{(0)}(t,\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, und

$$\mathbf{u}^{(j+1)}(t,\mathbf{a}) = \mathbf{U}(t)\mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{U}(t-s)\mathbf{G}\big(\mathbf{u}^{(j)}(s,\mathbf{a})\big)\,\mathrm{d}s - \int_t^\infty \mathbf{V}(t-s)\mathbf{G}\big(\mathbf{u}^{(j)}(s,\mathbf{a})\big)\,\mathrm{d}s$$

für $j \in \mathbb{N}_0$, und verwenden Sie $\mathbf{u}^{(3)}(t,\mathbf{a})$ zur Approximation der Abbildung $\xi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die stabile Mannigfaltigkeit

$$\mathscr{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 = \xi_2(x_1)\}$$

approximiert.

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Donnerstag, den 19.05.2021, um 23.59 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".