Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 4. 11. 2008

4. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 13:

H^1-Funktionen in mehr als einer Dimension müssen nicht beschränkt sein! Ein warnendes Beispiel: Seien $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ und $\Omega_0 := \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1\}$. Für $x \in \Omega_0$ sei

$$u(x) := \log\left(\log\left(|x|^{-1}\right) + 1\right).$$

Zeigen Sie, dass $u \in H^1(\Omega)$.

Hinweis: Schätzen Sie die H^1-Norm der folgenden „abgeschnittenen" Funktionen ab:

$$u_k(x) := \begin{cases} \log\left(\log\left(|x|^{-1}\right) + 1\right) & \text{für } k^{-1} < |x| < 1, \\ \log\left(\log(k) + 1\right) & \text{für } 0 <= |x| <= k^{-1}. \end{cases}$$

Aufgabe 14:

Beweisen Sie die *Poincarésche Ungleichung*: Für $v \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\|v\|_\Omega <= d_\Omega \|\nabla v\|_\Omega,$$

mit dem Durchmesser $d_\Omega := diam(\Omega)$ des Gebiets Ω.

Hinweis: Beschränken Sie sich auf zwei Raumdimensionen. Betrachten Sie eine approximierende Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ von v und verwenden Sie den Fundamentalsatz der Differential- und Integral-Rechnung.

Aufgabe 15:

Betrachten Sie $u : \Omega = (0, 2) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x <= 1, \\ 1 & \text{für } 1 <= x < 2. \end{cases}$$

Hat u eine schwache Ableitung? Wie sieht diese ggf. aus?

Aufgabe 16:

Beweisen Sie das *Spur-Lemma*: Für $v \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt die Abschätzung

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} <= c(\Omega)\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

mit einer von Ω abhängigen Konstante $c(\Omega)$.

Hinweis: Es genügt, den Spezialfall des Einheitsquadrats $\Omega := (0, 1) \times (0, 1)$ zu betrachten. Verwenden Sie wieder den Fundamentalsatz der Differentail- und Integral-Rechnung.

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 14. 11. 2008.