Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 11.05.2009

3. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastische Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 6: Seien X, Y Banachräume. Sei $T \in \mathcal{L}_1(X, Y)$. Zeigen Sie, dass

$$||T||_{\mathcal{L}_1} := \inf \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n'||_{X'} ||y_n||_Y,$$

eine Norm ist. Das Infimum erstreckt sich über alle nuklearen Darstellungen $T = \sum_{n=1}^{\infty} x_n' \otimes y_n$, mit $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n'||_{X'} ||y_n||_Y < \infty$.

Aufgabe 7: Sei $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$ mit $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$, dann wird das Operator $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$,

$$T : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 k(x,y) f(y) \mathrm{d}y \right)$$

definiert. Zeigen Sie:

a) $||T||_{\mathcal{L}_2}^2 = ||k||_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, wobei die λ_n die (von Null verschiedene) Eigenwerte von T sind.

b) Falls $k(x,y) = \min(x,y)$, dann $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in L^2([0,1])$.

Aufgabe 8: Sei $(E, ||.||)$ ein separabler reller Banachraum, wobei $d(.,.)$ die von der Norm induzierte Metrik ist. Sei $X : \Omega \to E$ eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert. Zeigen Sie:

a) Sei X stark messbar. Dann existiert eine Folge $X_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{N}$ von simplen Funktionen, sodass für $\omega \in \Omega$, gilt $d(X_n(\omega), X(\omega)) \searrow 0$.

b) Sei jetzt X Bochner-integrabel, und sei $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Dann existier eine (bis auf eine $\mathbb{P}$-Nullmenge) eindeutige Bochner-integrable $\mathcal{G}$-messbar Zufallsvariable $Z : \Omega \to E$ mit

$$\int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A Z \mathrm{d}\mathbb{P} \qquad \forall\, A \in \mathcal{G}.$$

Die Zufallsvariable Z wird mit $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]$ bezeichnet und wird *bedingte Erwartung* von X gegeben $\mathcal{G}$ genannt.

c) Es gilt $\big|\big|\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\big|\big| \leq \mathbb{E}\left[||X||\,|\mathcal{G}\right]$.

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 19.05.2009