Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 01.07.2009

8. Übungsblatt zur Vorlesung Stochastische Partielle Differentialgleichungen

Aufgabe 16: Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum $A : D(A) \to H$ infinitesimaler Generator einer analytischen Halbgruppe. Zusätzlich sei $R \in \hat{\mathcal{L}}_1^+(H)$. Zeigen Sie, dass der Prozess

$$W_A(t) = \int_0^t S(t-s)B\mathrm{d}W(s)$$

hölderstetig mit Exponent $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ ist. Nehmen Sie an, dass $B = \mathbb{I}$.

Hinweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|W_A(t) - W_A(s)\|^2\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_s^t \|S(t-\sigma)e_k\|^2 \mathrm{d}\sigma \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^s \|[S(t-\sigma) - S(s-\sigma)]e_k\|^2 \mathrm{d}\sigma \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass Konstanten M_i, $i = 1, 2$ und $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ existieren, mit

$$I_1 \le M_1^2 \mathrm{Tr}R(t-s) \quad \text{und} \quad I_2 \le \mathrm{Tr}R\frac{M_2^2 T^{1-2\gamma}}{\gamma^2(1-2\gamma)}(t-s)^{2\gamma}.$$

Danach benutzen Sie das Kolmogorov'sche Kriterium zusammen mit der Tatsache, dass $W_A(t) - W_A(s)$ Gauss'sch ist.

Aufgabe 17: **(Zylindrischer Wienerprozess I)** Sei $R \in \hat{\mathcal{L}}_1^+(K)$. Dann der R-Wienerprozess hat die folgende Darstellung:

$$W(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k(t) e_k, \quad t \in [0, T],$$

wobei $\{e_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $K_0 = R^{1/2}(K)$, und $\{\beta_k,\, k \in \mathbb{N}\}$, eine Familie von unabhängige reellwertige Wienerprozessen ist. Diese Reihe konvergiert in $L^2(\Omega; K)$, da die Einbettung $K_0 \subset K$ einen Hilbert-Schmidt Operator definiert. Falls R keine endliche Spur besitzt, verliert man diese Konvergenz. Wir wollen einen R-Wienerprozess konstruieren mit nicht nuklearem R konstruieren. Zu diesem Zweck brauchen wir einen weiteren Hilbertraum $(K_1, (\cdot,\cdot)_1)$ und eine Hilbert-Schmidt Einbettung

$$J : (K_0, (\cdot,\cdot)_0) \to (K_1, (\cdot,\cdot)_1)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass eine solche Einbettung immer existiert. Dafür setzen Sie $K_1 = K$ und

$$J(u) := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (u, e_k)_0 e_k$$

für $u \in K_0$, mit $\alpha_k \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ sodass $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k^2 < \infty$. Dann beweisen Sie, dass J injektiv und Hilbert-Schmidt ist.

b) Zeigen Sie, dass $R_1 := JJ^* \in \mathcal{L}(K_1)$ semipositiv definit und symmetrisch mit endlicher Spur ist.

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 07.07.2009