Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.01.2010

10. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

In den folgenden Aufgaben bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm: $\|v\|_\infty = \sup_x |v(x)|$.

Für alle auftretenden Dreiecke gelte $h/\rho \leq Const$, wobei h der Durchmesser und ρ der Inkreisradius des Dreiecks ist.

Aufgabe 33:

Zeigen Sie für lineare Funktionen v auf einem Dreick K mit Durchmesser h und Inkreisradius ρ

$$\|v\|_\infty \leq C\, h^{-1}\, \|v\|_{0,K},$$

wobei C nicht von K abhängt, solange $h/\rho \leq Const$.

Aufgabe 34:

Sei K ein Dreieck mit Durchmesser h und Inkreisradius ρ. Zeigen Sie, dass für den Interpolationsfehler gilt

$$\|u - \Pi_h u\|_\infty \leq Ch|u|_{2,K} \qquad \text{für alle } u \in H^2(K)\ ,$$

wobei C nicht von K abhängt, solange $h/\rho \leq Const$.

Hinweis: $H^2(K) \hookrightarrow C(K)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ist stetig und linear nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz. Zeigen Sie die Aussage zunächst für das Referenzdreick.

Aufgabe 35:

Ein H^2-reguläres Randwertproblem werde mit einer finite-Elemente Methode mit linearen finiten Elementen gelöst. Zeigen Sie, dass für den Fehler gilt

$$\|u - u_h\|_\infty \leq C\, h\, |u|_2.$$

Hinweis: Verwenden Sie $u - u_h = (u - \Pi_h u) + (\Pi_h u - u_h)$, die Aufgaben 33, 34 und dann $\Pi_h u - u_h = (\Pi_h u - u) + (u - u_h)$.

Aufgabe 36:

Betrachtet werde ein elliptisches Randwertproblem in variationeller Form mit $V = H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die finite-Elemente Methode mit linearen finiten Elementen in der H^1-Norm konvergiert (d.h. $\|u - u_h\|_1 \to 0$ für $h \to 0$), auch wenn die Lösung u nur in $H_0^1(\Omega)$ liegt.

Hinweis: Verwenden Sie Cea's Lemma und daß $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt.

Bemerkung: Die Konvergenz kann beliebig langsam sein, wenn nicht weitere Forderungen an die Regularität gestellt werden.

Besprechung in den Übungen am 27.01.2010.