Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 03.02.2010

12. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

In den folgenden Aufgaben ist $(\cdot,\cdot)$ das $L_2(\Omega)$-Skalarprodukt. Es seien λ_k die Eigenwerte und w_k die $L_2(\Omega)$-orthogonalen Eigenfunktionen mit $a(w_k,v)=\lambda_k(w_k,v)$ für alle $v\in H_0^1(\Omega)$, wobei $a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx$.

Aufgabe 41:

Betrachten Sie das Anfangs/Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u + f(x,t) & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ u & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega\times(0,T) \\ u & = & u_0 & \text{für } t=0 \end{array}$$

mit stetigem $f:\bar\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ und $u_0:\bar\Omega\to\mathbb{R}$.
Zeigen Sie unter der Annahme, dass eine klassische Lösung $u:\bar\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ existiert, dass diese gegeben ist durch

$$u(\cdot,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(u_0,w_k)e^{-\lambda_k t}+\int_0^t (f(\cdot,s),w_k)e^{-\lambda_k(t-s)}ds\right\}w_k.$$

Hinweis: Der Ausdruck in geschweiften Klammern ist die Lösung des linearen skalaren Anfangswertproblems

$$\frac{d\alpha_k}{dt}=-\lambda_k\alpha_k+(f(\cdot,t),w_k).\,,\quad \alpha_k(0)=(u_0,w_k)$$

Unter welchen (schwachen) Regularitätsvoraussetzungen an f und u_0 macht obige Formel noch Sinn?

Aufgabe 42:

Betrachten Sie die Wellengleichung

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & = & \Delta u + f(x,t) & \text{in } \Omega\times(0,T) \\ u & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega\times(0,T) \\ u & = & u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}=v_0 & \text{für } t=0 \end{array}$$

a) Wie sieht die Eigenbasisentwicklung einer (klassischen) Lösung dieses Anfangs/Randwertproblems aus?

   Hinweis: Die Lösung von $\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\omega^2\alpha+\phi(t)$, $\alpha(0)=\alpha_0$, $\frac{d\alpha}{dt}(0)=\beta_0$ ist gegeben durch $\alpha(t)=\cos\omega t\cdot\alpha_0+\omega^{-1}\sin\omega t\cdot\beta_0+\int_0^t\omega^{-1}\sin\omega(t-s)\phi(s)ds$.

b) Zeigen Sie, dass im Fall $f\equiv 0$ die „Energie“ $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t),\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t)\right)+\frac{1}{2}a\left(u(\cdot,t),u(\cdot,t)\right)$ für alle $t\geq 0$ konstant ist.

Aufgabe 43:

Schlagen Sie numerische Verfahren zur Lösung der Gleichungen der beiden vorigen Übungen vor (und/oder besuchen Sie die Vorlesung über die Numerik zeitabhängiger Differentialgleichungen im Sommersemester).

Programmieraufgabe 4 :

Versuchen Sie näherungsweise das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + \text{ grad } p &= f \text{ in } \Omega \\ \text{div } u &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [0,1]^2$ mit gemischten linearen finiten Elementen zu lösen, wobei der Druck p über die Normierung $\int_\Omega p dx = 0$ und die äußere Kraft durch $f = (1\ 1)^T$ festgelegt seien. Stabilisieren Sie zudem das Verfahren durch Verwendung des Mini-Elements mit Bubble-Funktionen.

Besprechung in den Übungen am 10.02.2010