Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 28.10.2009

1. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 1:

Sei $R(\cdot,\cdot)$ die Resolvente der linearen Differentialgleichung $y' = C(t)y$. Zeigen Sie:

(a) Für festes t_0 ist $R(\cdot, t_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt} R(t,t_0) = C(t)R(t,t_0), \qquad R(t_0,t_0) = I.$$

(b) Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$y' = C(t)y + q(t), \qquad y(t_0) = y_0$$

ist gegeben durch

$$y(t) = R(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)q(s)ds.$$

Aufgabe 2:

Zum Randwertproblem

$$y' = C(t)y + q(t), \qquad Ay(a) + By(b) = 0$$

betrachte man die Sensitivitätsmatrix

$$E(t) = AR(a,t) + BR(b,t) \qquad (a \le t \le b).$$

(a) Zeigen Sie: $E(t)$ ist für alle $t \in [a,b]$ invertierbar $\Longleftrightarrow$ $E(t)$ ist für ein $t \in [a,b]$ invertierbar. Dies sei im folgenden erfüllt.

(b) Zeigen Sie: Die eindeutige Lösung des obigen Randwertproblems ist gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)q(s)ds$$

mit der Green'schen Funktion

$$G(t,s) = \begin{cases} E(t)^{-1}AR(a,s) & \text{für } a \le s \le t \le b \\ -E(t)^{-1}BR(b,s) & \text{für } a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

(c) (Empfindlichkeit gegenüber Störungen der Inhomogenität)
Seien $y, \tilde{y}$ die Lösungen der Randwertprobleme

$$\begin{aligned} y' &= C(t)y + q(t), \qquad & Ay(a) + By(b) &= r \\ \tilde{y}' &= C(t)\tilde{y} + \tilde{q}(t), \qquad & A\tilde{y}(a) + B\tilde{y}(b) &= r. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\max_{a\le t\le b} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \le \gamma \max_{a \le t \le b} \|q(t) - \tilde{q}(t)\|$$

mit $\gamma = \max\limits_{a\le t\le b} \displaystyle\int_a^b \|G(t,s)\|\, ds \le (b-a) \max\limits_{a\le s,t\le b} \|G(t,s)\|$

Aufgabe 3:

(a) Schreiben Sie das Randwertproblem (mit reellem Parameter $\lambda \neq 0$)

$$u'' = \lambda^2 u, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

durch Einführen von $v = u'/\lambda$ in ein System 1. Ordnung um. Berechnen Sie dessen Resolvente und die Green'sche Funktion des Randwertproblems. Weisen Sie nach, daß für $\lambda \to +\infty$ die Resolvente wie e^{λ} wächst, wogegen die Green'sche Funktion unabhängig von λ beschränkt bleibt.

(Somit ist das Anfangswertproblem schlecht konditioniert, das Randwertproblem gut konditioniert.)

(b) Für welche Werte von $\omega \in \mathbb{R}$ ist das Randwertproblem

$$u'' = -\omega^2 u, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

eindeutig lösbar? Wir verhalten sich Resolvente des Anfangswertproblems und Green'sche Funktion des Randwertproblems für $\omega \to \pi$?

(Anfangswertproblem gut konditioniert, Randwertproblem schlecht konditioniert)

Hinweise: $R(t, s) = e^{C(t-s)}$, C diagonalisieren. $\lambda = i\omega$ in (b) erspart Ihnen Rechenarbeit.

Besprechung in den Übungen am 04.11.2009

Die Übungen finden jeweils mittwochs von 15–17 Uhr im Raum 1.034 (Verfügungsgebäude) statt.
An den Terminen 02.12.2009, 10.02.2010 und 17.02.2010 findet die Übung im Raum 1.033 (Verfügungsgebäude) statt.