Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.12.2009

6. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 18:

Sei u Lösung der Poissongleichung mit Dirichlet-Randbedingungen:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \,, \qquad u = g \quad \text{auf } \Gamma \tag{$*$}$$

und $\widetilde{u}$ löse das Problem zu gestörten Randdaten $\widetilde{g}$. Es seien $u, \widetilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

$$\sup_\Omega |\widetilde{u} - u| \leq \sup_\Gamma |\widetilde{g} - g|$$

und eine ebensolche Abschätzung für die finite Differenzen-Approximation.

Aufgabe 19:

Sei u Lösung von $(*)$, und sei $\widetilde{u}$ Lösung des Problems zu gestörter rechter Seite $\widetilde{f}$. Es seien $u, \widetilde{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie:

$$\sup_\Omega |\widetilde{u} - u| \leq \frac{r^2}{4} \cdot \sup_\Omega |\widetilde{f} - f| \,,$$

falls Ω in einem Kreis vom Radius r enthalten ist.

Hinweis: So etwas kennen Sie ja schon für das diskretisierte Problem.

Aufgabe 20:

Gegeben sei die Helmholtz-Gleichung mit Neumann-Randbedingungen:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \Gamma. \tag{$**$}$$

Zeigen Sie für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) u ist Lösung von $(**)$

(b) Es gilt
$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + uv \right) d(x,y) = \int_\Omega fv \; d(x,y) + \int_\Gamma gv \; d\sigma$$
für alle $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

(c) u ist Lösung des Variationsproblems
$$\frac{1}{2} \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v^2 \right] d(x,y) - \int_\Omega fv \; d(x,y) - \int_\Gamma gv \; d\sigma = \min!$$
unter allen $v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Aufgabe 21:

Gegeben sei die Poissongleichung mit gemischten Randbedingungen:

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \Gamma \backslash \Gamma_0.$$

Geben Sie – analog zur vorherigen Aufgabe – das zugehörige Variationsproblem an und zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen.

Besprechung in den Übungen am 09.12.2009