Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 12.10.2011

1. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 1:

Sei $R(\cdot,\cdot)$ die Resolvente der linearen Differentialgleichung $y' = C(t)y$. Zeigen Sie:

(a) Für festes t_0 ist $R(\cdot,t_0)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt} R(t,t_0) = C(t)R(t,t_0), \qquad R(t_0,t_0) = I.$$

(b) Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$y' = C(t)y + q(t), \qquad y(t_0) = y_0$$

ist gegeben durch

$$y(t) = R(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)q(s)ds.$$

Aufgabe 2:

Zum Randwertproblem

$$y' = C(t)y + q(t), \qquad Ay(a) + By(b) = 0$$

betrachte man die Sensitivitätsmatrix

$$E(t) = AR(a,t) + BR(b,t) \qquad (a \le t \le b).$$

(a) Zeigen Sie: $E(t)$ ist für alle $t \in [a,b]$ invertierbar $\Longleftrightarrow$ $E(t)$ ist für ein $t \in [a,b]$ invertierbar. Dies sei im folgenden erfüllt.

(b) Zeigen Sie: Die eindeutige Lösung des obigen Randwertproblems ist gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)q(s)ds$$

mit der Green'schen Funktion

$$G(t,s) = \begin{cases} E(t)^{-1}AR(a,s) & \text{für } a \le s \le t \le b \\ -E(t)^{-1}BR(b,s) & \text{für } a \le t \le s \le b. \end{cases}$$

(c) (Empfindlichkeit gegenüber Störungen der Inhomogenität)
Seien $y, \tilde{y}$ die Lösungen der Randwertprobleme

$$\begin{aligned} y' &= C(t)y + q(t), \qquad & Ay(a) + By(b) &= r \\ \tilde{y}' &= C(t)\tilde{y} + \tilde{q}(t), \qquad & A\tilde{y}(a) + B\tilde{y}(b) &= r. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\max_{a\le t\le b} \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \le \gamma \max_{a\le t\le b} \|q(t) - \tilde{q}(t)\|$$

mit $\gamma = \max_{a\le t\le b} \int_a^b \|G(t,s)\|\, ds \le (b-a) \max_{a\le s,t\le b} \|G(t,s)\|$

Aufgabe 3:

(a) Schreiben Sie das Randwertproblem (mit reellem Parameter $\lambda \neq 0$)

$$u'' = \lambda^2 u, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

durch Einführen von $v = u'/\lambda$ in ein System 1. Ordnung um. Berechnen Sie dessen Resolvente und die Green'sche Funktion des Randwertproblems. Weisen Sie nach, dass für $\lambda \to +\infty$ die Resolvente wie e^{λ} wächst, wogegen die Green'sche Funktion unabhängig von λ beschränkt bleibt.

(Somit ist das Anfangswertproblem schlecht konditioniert, das Randwertproblem gut konditioniert.)

(b) Für welche Werte von $\omega \in \mathbb{R}$ ist das Randwertproblem

$$u'' = -\omega^2 u, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$$

eindeutig lösbar? Wir verhalten sich Resolvente des Anfangswertproblems und Green'sche Funktion des Randwertproblems für $\omega \to \pi$?

(Anfangswertproblem gut konditioniert, Randwertproblem schlecht konditioniert)

Hinweise: $R(t,s) = e^{C(t-s)}$, C diagonalisieren. $\lambda = i\omega$ in (b) erspart Ihnen Rechenarbeit.

Besprechung in den Übungen am 17.10.2011

Die Übungen finden jeweils montags von 14-16 Uhr in N16 und von 16-18 Uhr in N15 statt.

Die Einteilung der Übungsgruppen wird im Laufe des Tages (12.10) auf der Homepage veröffentlicht.