

11. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 36:

Sei $A = M - N$ eine Zerlegung der symmetrischen, positiv definiten Matrix A , und es sei auch N symmetrisch und positiv definit. Man zeige, dass die Iteration

$$x_{k+1} = x_k + M^{-1}(b - Ax_k)$$

konvergiert und dass die Eigenwerte der Iterationsmatrix reell sind und zwischen 0 und 1 liegen.

Aufgabe 37:

Die Iteration im Zweigitter-Algorithmus kann in der Form

$$u_h^{(k+1)} = Mu_h^{(k)} + v_h$$

mit $v_h := (I - M)u_h$ geschrieben werden.

Geben Sie die Matrix M explizit an für den Fall, dass am Anfang der Iteration ν_1 und beim Nachglätten ν_2 Glättungsschritte durchgeführt werden. Zeigen Sie, dass der Spektralradius von M nur von der Summe $\nu_1 + \nu_2$ abhängt und nicht davon, wieviele Glättungsschritte a priori und wieviele a posteriori durchgeführt werden.

Aufgabe 38:

A und C seien symmetrisch positiv definite Matrizen.

Zeigen Sie: Falls $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar ist, so auch $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -C \end{bmatrix}$.

Aufgabe 39:

A sei symmetrisch positiv definit, und $\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix}$ sei invertierbar.

- (a) Zeigen Sie, dass $A + tB^TB$ für jedes $t > 0$ positiv definit ist.
- (b) Die Lösung des Minimierungsproblems

$$(P_t) \quad \frac{1}{2}u^T(A + tB^TB)u - u^Tf = \min!$$

unter der Nebenbedingung $Bu = 0$ hängt nicht von t ab. Die Nebenbedingung werde nun ignoriert, und andererseits werde $\lambda = tBu$ als neue Variable eingeführt. Zeigen Sie, dass ein Problem mit einer Matrix wie in der vorigen Aufgabe entsteht.

- (c) Zeigen Sie, dass die Lösung von (P_t) für $t \rightarrow +\infty$ (ohne Nebenbedingung) gegen die Lösung von P_0 mit Nebenbedingung $Bu = 0$ konvergiert.

Programmieraufgabe 4 :

Lösen Sie das Problem aus Programmieraufgabe 2 mit einem Zweigitter- oder Mehrgitterverfahren mit zwei Gauß-Seidel-Iterationen als Glättungsschritt.

Besprechung in den Übungen am 23.01.2012

Besprechung der verbleibenden Programmieraufgaben in den Übungen am 16.01.2012