Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 16.05.2012

5. Übungsblatt zur Numerik instationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 15: (verallgemeinertes Gronwall-Lemma und diskretes Gronwall-Lemma)

(a) Es sei $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle für ein $\mu > 0$

$$0 \le f(t) \le M + L \int_0^t (t-s)^{\mu-1} f(s)\, ds \;, \quad 0 \le t \le T \;.$$

Zeigen Sie: Es gilt $f(t) \le CM$ für $0 \le t \le T$ mit einer Konstanten C, die nur von L, T und μ abhängt.

Hinweis: $\frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * \ldots * \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} * f = \frac{t^{m\mu-1}}{\Gamma(m\mu)} * f$ mit der Faltung $(f*g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$ und der Eulerschen Gamma-Funktion.

(b) Die Folge f_n, $n = 0,1,\ldots,N$ erfülle für ein $\mu > 0$ und $\tau > 0$

$$0 \le f_n \le M + L\tau \sum_{j=0}^{n-1} ((n-j)\tau)^{\mu-1} f_j \,, \quad 0 \le n \le N \;.$$

Zeigen Sie: Es gilt $f_n \le CM$ für $0 \le n\tau \le T = N\tau$ mit einer Konstanten C, die nur von L, T und μ abhängt.

Hinweis: Definieren Sie eine stückweise konstante Funktion f und verwenden Sie Teil (a).

Aufgabe 16:

Es sei V ein separabler Hilbert-Raum mit der Norm $\|\cdot\|$ und dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$.

Zeigen Sie: Für eine Folge von Fourier-Koeffizieten $\{u_n\}_n \subset V$ gegeben durch

$$u_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} \widehat{u}(\varphi) d\varphi, \qquad \widehat{u}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{in\varphi}$$

gilt die Parseval'sche Gleichung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\widehat{u}(\varphi)\|^2 d\varphi.$$

Hinweis: In einem separablen Hilbert-Raum existiert eine Orthonormalbasis.

Programmieraufgabe 2 : Implementieren Sie das Radau5-Verfahren (Radau IIA der Ordnung 5) mit konstanter Schrittweite in Matlab, indem Sie die Umformulierung des nichtlinearen Gleichungssystems aus Aufgabe 6 und die Abbruchkriterien der Newtoniteration aus Aufgabe 7 realisieren. Das Programm soll eine Fehlermeldung ausgeben, wenn Divergenz vorliegt oder die Konvergenz nach k_{max} Iterationen nicht garantiert werden kann.
Testen Sie Ihr Programm an der van der Pol-Gleichung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ \varepsilon y_2' &= (1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned}$$

mit Anfangswert $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = -0.66$ für verschiedene Werte von ε und tol, z.B. $\varepsilon = 1e-6$.

Besprechung in den Übungen am 22.05.2012
Die Übungen finden jeweils dienstags von 16–18 Uhr im Raum S9 statt.