

## 10. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

### Programmierprojekt 3 (Numerische Integration) :

Implementieren Sie die Trapezsumme zur numerischen Berechnung des Integrals  $\int_a^b f(x)dx$  mit Schrittweitensteuerung, indem Sie

- (1) die Simpson-Regel auf einem Intervall der Länge  $2h$  implementieren.
- (2) die zweifache Anwendung der Trapezregel, also die Trapezsumme mit  $n = 2$  auf einem Intervall der Länge  $2h$  implementieren und analytisch den führenden Fehlerterm bestimmen.
- (3) annehmen, dass das Ergebnis der Simpson-Regel viel genauer ist als das der Trapezsumme und sich der Fehler  $e$  der Integration auf einem Intervall der Länge  $2h$  durch den Betrag der Differenz der Ergebnisse abschätzen lässt.
- (4) unter der zusätzlichen Annahme  $f''(x) \approx \text{const.}$  zeigen, dass die neue Schrittweite

$$h_{\text{neu}} = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{e}} \cdot h$$

zu einem Fehler  $e \approx \varepsilon$  führt. Dabei ist  $\varepsilon$  der durch den Benutzer vorgegebene maximale Fehler auf einem Teilintervall der Länge  $2h$ .

- (5) folgendermaßen vorgehen: Beginnend bei  $a$  mit Anfangsschrittweite  $h = 0.1$  sollen jeweils die Trapezsumme, die Simpson-Regel und der geschätzte Fehler berechnet werden. Liegt letzterer unter  $\varepsilon$ , wird die Integration des Teilintervalls akzeptiert und die Trapezsumme sowie die Summe für die Simpson-Regel separat aufaddiert, andernfalls wird die Integration auf einem kleineren Teilintervall wiederholt. In beiden Fällen wird eine neue optimale Schrittweite

$$h_{\text{neu}} = 0.8 \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{e}} \cdot h$$

gewählt. Zudem muss gewährleistet sein, dass die Integration bei  $b$  endet.  
Wozu dient der Faktor 0.8?

Wählen Sie  $\varepsilon = 10^{-5}$ , und testen Sie das Programm an den Beispielen

- i)  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$
- ii)  $\int_0^{2\pi} \cos(8x) dx$
- iii)  $\int_0^1 30(x^8 - x^6) dx$ .

Realisieren Sie die Trapezsumme für beliebiges  $n$ , und berechnen Sie näherungsweise das Integral  $\int_0^\pi (\sin x)^2 dx$  durch Trapezsummen mit  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  gleichlangen Teilintervallen.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem analytisch berechneten exakten Wert. Versuchen Sie zudem numerisch die  $h$ -Potenz des führenden Fehlerterms zu bestimmen, indem Sie die Trapezsumme auf die Beispiele i) – iii) anwenden.

Tipp: Ermitteln Sie zunächst eine Referenzlösung für großes  $n$  und berechnen dann den Fehler mit  $n = n_0$  und  $n = 2n_0$ . (Beachte  $h = \frac{b-a}{n}$ .)

Studieren Sie die Idee der Newton-Cotes-Quadraturformeln und stellen Sie den Zusammenhang zur Trapez- und Simpson-Regel her (z.B. Deuffhard, Hohmann: Numerische Mathematik 1, Eine algorithmische Einführung, de Gruyter, 2003<sup>3</sup>, S. 302–307). Warum gibt es keine Newton-Cotes-Formel höherer Ordnung?

**Bitte wenden**

**Allgemeine Hinweise:**

- (1) Abgabe des Programms bis zum 15.07.2009;
- (2) Präsentation des Programms und der Ergebnisse in einem Vortrag am 20. bzw. 22.07.2009 in der Übungsgruppe;
- (3) Der Quellcode muss leicht nachvollziehbar sein, d.h. er muss übersichtlich und gut kommentiert sein;
- (4) Die Wahl der Programmiersprache ist in Absprache mit dem Tutor zu treffen.