Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 28.10.2008

3. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 11 :
Leiten Sie aus $\log(ab) = \log a + \log b$ für $a, b > 0$ her, dass

(a) $\log a^n = n \log a$ für jede natürliche Zahl n (durch Induktion)

(b) $\log a^x = x \log a$ für jede rationale Zahl x.

Aufgabe 12 :
Zeigen Sie unter Verwendung der Additionstheoreme für $\sin(x+y)$ und $\cos(x+y)$, dass

(a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(b) $\tan\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Aufgabe 13 :
Leiten Sie unter Verwendung der Potenzreihenentwicklungen für Sinus und Cosinus die Potenzreihe der Tangensfunktion $\tan x = \sin x / \cos x$ bis zur siebten Potenz von x her.

Aufgabe 14 :
Leiten Sie – wie bereits Newton vor Ihnen – aus der Reihe $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$ für $\arcsin x$ die Reihe für $x = \sin z$ in der Form $x = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + a_7 z^7 + \dots$ und jene von $w = \cos z$ durch Binomialentwicklung von $w = \sqrt{1-x^2}$ her.

Aufgabe 15 :
Newton schlug vor, π auf folgende Weise zu berechnen:

$$\pi = 24A + \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad = 24\left(\frac{2}{3}\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\frac{1}{2^5} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot\frac{2}{7}\frac{1}{2^7} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{2}{9}\frac{1}{2^9} - \dots\right) + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

wobei A die Fläche zwischen x-Achse und dem Kreisbogen $y = \sqrt{x(1-x)}$ von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{4}$ ist.
Begründen Sie beide Schritte dieser Formel unter Zuhilfenahme der Binomischen Reihe.

Aufgabe 16 :

(a) Berechnen Sie die Fläche a_n des dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und die Fläche A_n des dem Einheitskreis umschriebenen regelmäßigen n-Ecks für $n = 6$ und 12.

(b) Leiten Sie aus diesem Ergebnis ab, dass

$$3 < \pi < 12(2-\sqrt{3}).$$

Hinweis: Was ist $\sin\frac{\pi}{3}$ und $\cos\frac{\pi}{3}$?
Beachten Sie weiters $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ und $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ (warum?).

Abgabe vor Beginn der Vorlesung am 04.11.2008, Besprechung in den Übungen