Vorspann: Konvexe Funktionen und Ungleichungen

I. Folgen im $\mathbb{R}^n$ (Topologie im $\mathbb{R}^n$)

1. Normen auf dem $\mathbb{R}^n$
2. Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$
3. Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen
4. Kompakte Mengen

II. Stetige Funktionen

1. Funktionen mehrerer Veränderlicher, vektorwertige Funktionen: Beispiele
2. Stetige Funktionen
3. Hausdorff' Charakterisierung stetiger Funktionen
4. Satz von Maximum und Minimum, Anwendung: Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{R}^n$
5. Gleichmäßige Stetigkeit, Anwendung: Integrale mit Parametern
6. Konstruktion stetiger Funktionen durch gleichmäßige Konvergenz, Beispiel Peano-Hilbert-Kurve
7. Wegzusammenhängende Mengen, Zwischenwertsatz

III. Differenzierbare Funktionen

1. Begriff der Differenzierbarkeit
2. Partielle Ableitungen
3. Kettenregel, Anwendung: Orthogonalität von Gradient und Niveaulinien
4. Mittelwertsatz und Schrankensatz
5. Banach' Fixpunktsatz
6. Satz von der lokalen Umkehrbarkeit
7. Satz über implizite Funktionen
8. Höhere partielle Ableitungen

Analysis II

Vorspann: Konvexe Funktionen und Ungleichungen

leiten hier einige nützliche Ungleichungen her, die auf der Konvexität von $-\ln$ beruhen: Ungl. zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel, Hölder' Ungl., Minkowski' Ungl.

Ende 19. Jh.

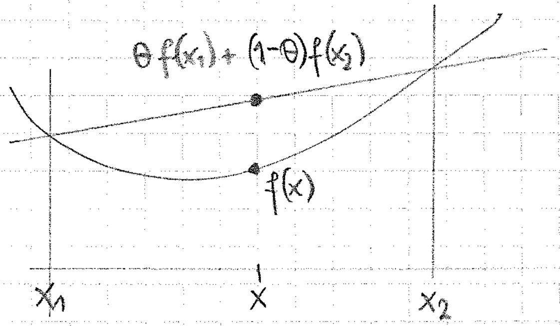
I.f. sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Def: Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\theta \in (0,1)$ gilt:

$$(K) \qquad f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2)$$

f heißt streng konvex, falls in (K) Gleichheit nur für $x_1 = x_2$ gilt

Bild:



$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 = x_1 + (1-\theta)(x_2 - x_1)$$

charakterisieren Konvexität durch 2. Ableitung:

Satz 1: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar.

(a) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \implies f$ konvex

(b) $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \implies f$ streng konvex

In (a) gilt auch $\Leftarrow$.

Beweis: Sei $x_1 < x < x_2$.

Nach MWS gibt es $\xi_1 \in (x_1, x)$, $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \quad , \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$$

und $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ mit

$$\frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = f''(\xi) \geq 0 \quad \text{in (a)}$$

$$\text{bzw.} \quad > 0 \quad \text{in (b)}.$$

Somit $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{(<)}{\leq} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \Big| \cdot (x - x_1)(x_2 - x)$$

$$f(x)\,(x_2 - x + x - x_1) \underset{(<)}{\leq} (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)$$

d.h. $$f(x) \underset{(<)}{\leq} \underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}}_{= \theta} f(x_1) + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{= 1 - \theta} f(x_2)$$

für $x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2$

somit f konvex

zeigen noch ($\Leftarrow$) in (a):

f konvex $\Rightarrow$ $f(x) \leq \frac{1}{2} f(x+h) + \frac{1}{2} f(x-h)$ $\forall x \in I$ (außer Randp.)

und $\forall h > 0$ gen. klein

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \geq 0$$

$$\downarrow \; h \to 0$$

$$f''(x)$$

also $f''(x) \geq 0$

wegen $f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$

mit ξ zw. x und $x+h$

einfache Verallgemeinerung der Konvexitätsungleichung:

<u>Satz 2:</u> (<u>Jensen' Ungleichung</u>) Sei $f: I \to \mathbb{R}$ konvex

$\Rightarrow \quad \forall x_1, \dots, x_n \in I \quad \forall \theta_1, \dots, \theta_n \in (0,1)$ mit $\theta_1 + \dots + \theta_n = 1$:

$$f(\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n) \leq \theta_1 f(x_1) + \dots + \theta_n f(x_n)$$

Ist f streng konvex, gilt Gleichheit nur für $x_1 = \dots = x_n$.

<u>Beweis</u> durch Induktion: $n = 2$ ✓ (K)

$n \to n+1$: $\theta_1 + \dots + \theta_n = 1 - \theta_{n+1}$

$$f(\underbrace{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n}_{= (1-\theta_{n+1})\hat{x}_n} + \theta_{n+1} x_{n+1}) \leq$$

$= (1-\theta_{n+1})\hat{x}_n$ mit $\hat{x}_n = \underbrace{\frac{\theta_1}{1-\theta_{n+1}}}_{=:\hat{\theta}_1} x_1 + \dots + \underbrace{\frac{\theta_n}{1-\theta_{n+1}}}_{=:\hat{\theta}_n} x_n \in I$

$$\hat{\theta}_1 + \dots + \hat{\theta}_n = 1$$

$$\underset{(K)}{\leq} (1-\theta_{n+1}) f(\hat{x}_n) + \theta_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\underset{\text{I.V.}}{\leq} (1-\theta_{n+1}) \left(\hat{\theta}_1 f(x_1) + \dots + \hat{\theta}_n f(x_n)\right) + \theta_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$= \theta_1 f(x_1) + \dots + \theta_n f(x_n) + \theta_{n+1} f(x_{n+1}) \qquad \square$$

wenden dies auf $-\ln$ an: $-\ln''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$,

also $-\ln$ streng konvex auf $(0,\infty)$

erhalten

<u>Satz 3:</u> (Ungl. zwischen geom. und arithmet. Mittel)

Seien $x_j > 0$, $\theta_j > 0$ $(j = 1, \dots, n)$ und $\theta_1 + \dots + \theta_n = 1$

Es gilt

$$\underline{x_1^{\theta_1} \cdots x_n^{\theta_n} \leq \theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n}$$

mit Gleichheit für $x_1 = \dots = x_n$

insbes. für $\theta_1 = \dots = \theta_n = \frac{1}{n}$: $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

__Beweis:__ $-\ln(\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Jensen'Ungl.}}}{\le} -(\theta_1 \ln x_1 + \dots + \theta_n \ln x_n)$

mult. mit -1, nehme exp, erhalte Beh.

(beachte $\exp(\theta_1 \ln x_1 + \dots + \theta_n \ln x_n) = x_1^{\theta_1} \cdots x_n^{\theta_n}$)

erhalten damit

__Satz 4:__ __Hölder'Ungl.__ (1889) 4!

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Seien $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ beliebig.

$$\Longrightarrow \quad \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{1/q}$$

insbesondere für $p = q = 2$: __Cauchy-Schwarz' Ungl.__ (C. 1821)

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

__Beweis:__ Sei $\xi = \left(\sum_j |x_j|^p \right)^{1/p}$, $\eta = \left(\sum |y_j|^q \right)^{1/q}$.

$$\frac{|x_j y_j|}{\xi \eta} = \left(\frac{|x_j|^p}{\xi^p} \right)^{1/p} \cdot \left(\frac{|y_j|^q}{\eta^q} \right)^{1/q} \underset{S.3}{\le} \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\xi^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\eta^q}$$

summiere von 1 bis n, erhalte

$$\frac{1}{\xi\eta} \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \le \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1$$

$$\text{VI} \quad \Delta\text{-Ungl.}$$

$$\frac{1}{\xi\eta} \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|$$

$\square$

daraus schließlich

Satz 5: Minkowski' Ungleichung

Für $p \geq 1$ und bel. $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ $(j=1,\dots,n)$ gilt

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}$$

Beweis: schreiben

$$\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p = \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1}$$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1}$$

wenden auf die beiden letzten Summen Hölder' Ungl. an $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$\sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

beachte $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \implies (p-1)q = p$

dividiere in 1. Ungl. beide Seiten durch $\left(\sum |x_j + y_j|^p\right)^{1/q}$:

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left(\sum |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |y_j|^p\right)^{1/p}$$

mit $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ folgt Beh. $\square$