

Vorspann: Konvexe Funktionen und Ungleichungen

I. Folgen im \mathbb{R}^n (Topologie im \mathbb{R}^n)

1. Normen auf dem \mathbb{R}^n
2. Konvergenz von Folgen im \mathbb{R}^n
3. Umgebungen, offene und abgeschlossene Mengen
4. Kompakte Mengen

II. Stetige Funktionen

1. Funktionen mehrerer Veränderlicher, vektorwertige Funktionen: Beispiele
2. Stetige Funktionen
3. Hausdorff' Charakterisierung stetiger Funktionen
4. Satz von Maximum und Minimum, Anwendung: Äquivalenz von Normen auf \mathbb{R}^n
5. Gleichmäßige Stetigkeit, Anwendung: Integrale mit Parametern
6. Konstruktion stetiger Funktionen durch gleichmäßige Konvergenz, Beispiel Peano-Hilbert-Kurve
7. Wegzusammenhängende Mengen, Zwischenwertsatz

III. Differenzierbare Funktionen

1. Begriff der Differenzierbarkeit
2. Partielle Ableitungen
3. Kettenregel, Anwendung: Orthogonalität von Gradient und Niveaulinien
4. Mittelwertsatz und Schrankensatz
5. Banach' Fixpunktsatz
6. Satz von der lokalen Umkehrbarkeit
7. Satz über implizite Funktionen
8. Höhere partielle Ableitungen

9. Taylor-Reihen
10. Differentiation von Integralen mit Parameter

IV. De maximis & minimis

1. Lokale Maxima und Minima
2. Lokale Maxima und Minima unter Nebenbedingungen
3. Variationsprobleme
4. Isoperimetrische Variationsprobleme

V. Mehrdimensionale Integration

1. Integrale stetiger Funktionen über Quader
2. Integrale unstetiger Funktionen, Nullmengen
3. Integrale über allgemeinere beschränkte Mengen
4. Volumen unter affinen Transformationen
5. Transformationssatz

VI. Kurven- und Oberflächenintegrale

1. Kurven, Bogenlänge, Kurvenintegral
2. Zweidimensionale partielle Integration, Green–Riemann¹ Formel
3. Flächeninhalt von Parallelogrammen im Raum
4. Flächen im Raum, Flächeninhalt, Flächenintegral
5. Dreidimensionale partielle Integration, Integralsatz von Gauß
6. Anwendung: Kontinuitätsgleichung der Fluidodynamik

Analysis II

Vorspann: Konvexe Funktionen und Ungleichungen

leisten hier einige nützliche Ungleichungen her, die auf der Konvexität von $-\ln$ beruhen: Ungl. zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel, Hölder'Ungl., Minkowski'Ungl.

Ende 19. Jhd.

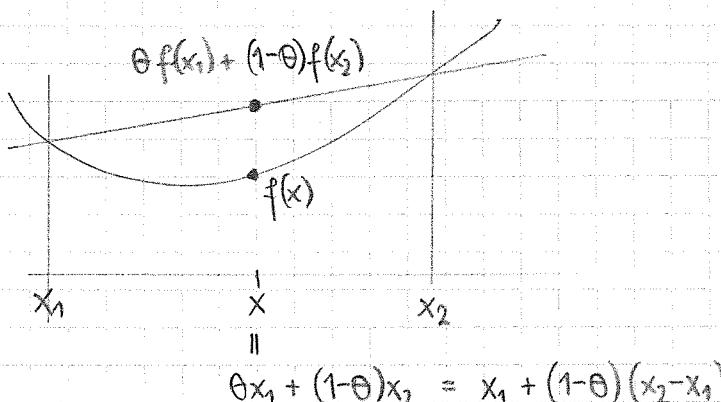
I.f. sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Def: Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\theta \in (0,1)$ gilt:

$$(K) \quad f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2)$$

f heißt stetig konvex, falls in (K) Gleichheit nur für $x_1=x_2$ gilt

Bild:



charakterisieren Konvexität durch 2. Ableitung:

Satz 1: Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar.

(a) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ konvex

(b) $f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ streng konvex

In (a) gilt auch \Leftarrow .

Beweis: Sei $x_1 < x < x_2$.

Nach MWS gibt es $\xi_1 \in (x_1, x)$, $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$$

und $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ mit

$$\frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} = f''(f) \geq 0 \quad \text{in (a)} \\ \text{bzw. } > 0 \quad \text{in (b)}.$$

Somit

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad | \cdot (x - x_1)(x_2 - x)$$

$$f(x)(x_2 - x + x - x_1) \leq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$$

$$\text{d.h. } f(x) \leq \underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1)}_{<} + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)}_{= 1 - \theta}$$

$$\text{für } x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$$

somit f konvex

zeigen noch (\Leftarrow) in (a):

$$f \text{ konvex} \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h) \quad \forall x \in I \text{ (außer Randp.)}$$

und $\forall h > 0$ gen. klein

$$\Rightarrow \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \geq 0$$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$

$$f''(x)$$

also $f''(x) \geq 0$

$$\text{wegen } f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\eta)$$

mit η zw. x und $x+h$

einfache Verallgemeinerung der Konvexitätsungleichung:

Satz 2: (Jensen'sche Ungleichung) Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex

$$\Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in I, \forall \theta_1, \dots, \theta_n \in (0,1) \text{ mit } \theta_1 + \dots + \theta_n = 1 : \\ f(\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n) \leq \theta_1 f(x_1) + \dots + \theta_n f(x_n)$$

falls f streng konvex, gilt Gleichheit nur für $x_1 = \dots = x_n$.

Beweis durch Induktion: $n=2 \quad \checkmark \quad (\text{K})$

$$n \rightarrow n+1 : \theta_1 + \dots + \theta_n = 1 - \theta_{n+1}$$

$$f(\underbrace{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n + \theta_{n+1} x_{n+1}}_{= (1-\theta_{n+1}) \hat{x}_n}) \leq \\ = (1-\theta_{n+1}) \hat{x}_n \quad \text{mit} \quad \hat{x}_n = \underbrace{\frac{\theta_1}{1-\theta_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\theta_n}{1-\theta_{n+1}} x_n}_{=: \hat{\theta}_1} \in \underbrace{I}_{=: \hat{\theta}_n}$$

$$\hat{\theta}_1 + \dots + \hat{\theta}_n = 1$$

$$\leq (1-\theta_{n+1}) f(\hat{x}_n) + \theta_{n+1} f(x_{n+1})$$

(K)

$$\stackrel{\text{I.V.}}{\leq} (1-\theta_{n+1}) (\hat{\theta}_1 f(x_1) + \dots + \hat{\theta}_n f(x_n)) + \theta_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$= \theta_1 f(x_1) + \dots + \theta_n f(x_n) + \theta_{n+1} f(x_{n+1}) \quad \square$$

wenden dies auf $-\ln$ an: $-\ln''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$,

also $-\ln$ streng konvex auf $(0, \infty)$

erhalten

Satz 3: (Ungl. zwischen geom. und arithmet. Mittel)

Seien $x_j > 0, \theta_j > 0 \quad (j=1, \dots, n)$ und $\theta_1 + \dots + \theta_n = 1$

Es gilt

$$\frac{x_1^{\theta_1} \dots x_n^{\theta_n}}{\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n} \leq \theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n$$

mit Gleichheit
für $x_1 = \dots = x_n$

$$\text{insbes. für } \theta_1 = \dots = \theta_n = \frac{1}{n} : \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{Beweis: } -\ln(\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n) \leq -(\theta_1 \ln x_1 + \dots + \theta_n \ln x_n)$$

↑
jenseit' Umg.

mult. mit -1 , nehme \exp , erhalte Beh.

$$(\text{beachte } \exp(\theta_1 \ln x_1 + \dots + \theta_n \ln x_n) = x_1^{\theta_1} \cdots x_n^{\theta_n})$$

erhalten damit

Satz 4: Hölder' Umg. (1889)

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Seien $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$) beliebig.

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{1/q}$$

insbesondere für $p=q=2$: Cauchy-Schwarz' Umg. (C. 1821)

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}$$

Beweis: Sei $\varphi = \left(\sum_j |x_j|^p \right)^{1/p}$, $\eta = \left(\sum_j |y_j|^q \right)^{1/q}$.

$$\frac{|x_j y_j|}{\varphi \eta} = \left(\frac{|x_j|^p}{\varphi^p} \right)^{1/p} \cdot \left(\frac{|y_j|^q}{\eta^q} \right)^{1/q} \stackrel{s.3}{\leq} \frac{1}{p} \frac{|x_j|^p}{\varphi^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_j|^q}{\eta^q}$$

summiere von 1 bis n , erhalte

$$\frac{1}{\varphi \eta} \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1$$

VII Δ-Umg.

$$\frac{1}{\varphi \eta} \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|$$

□

daraus schließlich

Satz 5: Minkowski'sche Ungleichung

Für $p \geq 1$ und bel. $x_j, y_j \in \mathbb{R}$ ($j=1, \dots, n$) gilt

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p}$$

Beweis: schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |y_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \\ &\triangleq \text{Ungl.} \end{aligned}$$

wenden auf die beiden letzten Summen Hölder'sche Ungl. an ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |x_j + y_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

$$\text{ beachte } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow (p-1)q = p$$

dividiere in 1. Ungl. beide Seiten durch $(\sum |x_j + y_j|^p)^{1/q}$:

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum |y_j|^p \right)^{1/p}$$

mit $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ folgt Beh. □