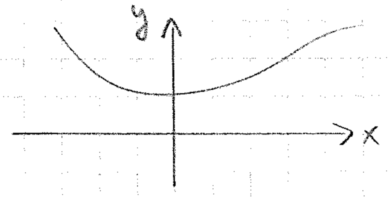
II. Stetige Funktionen

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher, vektorwertige Funktionen: Beispiele

betrachten Funktionen $f: X \to Y$, wobei $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$

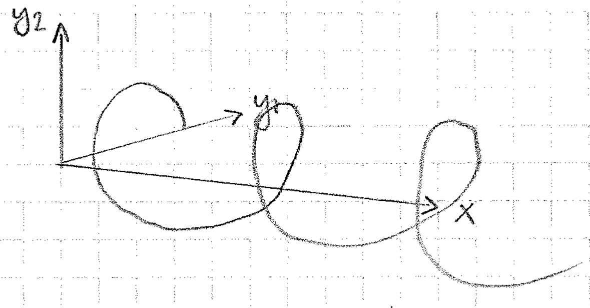
$$y = f(x) \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Bsp: 1) $n = 1$, $m = 1$

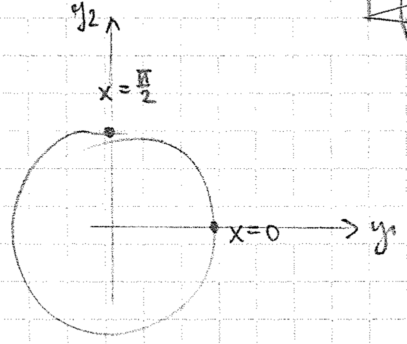


Kurve in $\mathbb{R}^2$

2) $n = 1$, $m = 2$



Kurve in $\mathbb{R}^3$

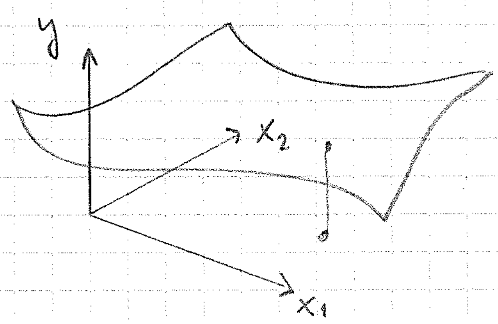


$y_1 = \cos x$

$y_2 = \sin x$

Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$

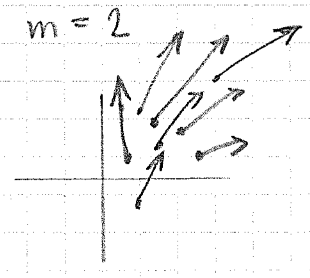
3) $n = 2$, $m = 1$



$y = f(x_1, x_2)$

Fläche in $\mathbb{R}^3$

4) $n = 2$, $m = 2$



Vektorfeld

(z.B. Geschwindigkeit in jedem Ortspunkt

5) lineare Abbildungen $\quad y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$

$$\vdots$$

$$y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n$$

$$y = Ax \qquad A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{Matrix}$$

schreibe auch $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear

2 Stetige Funktionen

Def: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in X, \|x - x_0\| < \delta : \;\; \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

f heißt stetig (auf X), falls f stetig in jedem $x_0 \in X$.

selbe Def. wie in $\mathbb{R}$, jetzt $\|\cdot\|$ statt $|\cdot|$

beachte wieder: Stetigkeit unabhängig von spezieller Wahl äquivalenter Normen

Bsp: $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig: $\big|\,\|x\| - \|x_0\|\,\big| \le \|x - x_0\|$

lineare Abb. $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig: $\|Ax - Ax_0\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{ij}(x_j - x_{0j})\right| \le \max_i \sum_j |a_{ij}| \cdot \|x - x_0\|$

können viele der in $\mathbb{R}$ bekannten Eig. samt Beweis übertragen:

1) f stetig in $x_0 \iff \forall$ Folge (x_k) in X mit $x_k \to x_0$: $f(x_k) \to f(x_0)$

2) $f, g: X \to \mathbb{R}^m$ stetig in $x_0 \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad f + g, \; \alpha f$ stetig in x_0

3) $f: X \to \mathbb{R}^m$, $\varphi: X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0

$\Rightarrow \quad \varphi f$ stetig in x_0

4) $\varphi: X \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi(x) \neq 0 \;\; \forall x \in X \Rightarrow \frac{1}{\varphi}$ stetig

5) $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ $\quad (X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n, Z \subset \mathbb{R}^l)$

f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0)$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ stetig in x_0

haben zudem für $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$

<u>Satz</u>: $f : X \to \mathbb{R}^m$ stetig in x_0

$\Longleftrightarrow$ $f_j : X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 für $j = 1, \dots, m$

<u>Beweis</u>: nehme Maximumnorm in Def. der Stetigkeit $\square$

<u>aber</u> für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: aus

$f(\cdot, x_{02}) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_1 \mapsto f(x_1, x_{02})$ stetig in x_{01}

$f(x_{01}, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x_2 \mapsto f(x_{01}, x_2)$ stetig in x_{02}

folgt i.a. <u>nicht</u>

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$

Gegenbsp: $$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & = \end{cases}$$

$f(\cdot, 0)$ und $f(0, \cdot)$ stetig ,

aber für Folge $x_k = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = \dfrac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0,0)$

3 Hausdorff' Charakterisierung stetiger Funktionen

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$

Bez: $f(U) = \{ f(x) \mid x \in U \}$ Bild von U

$f^{-1}(V) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in V \}$ Urbild von V

f stetig in $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n, \|x - x_0\| < \delta : \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \quad B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$

$\Longleftrightarrow$ für jede Umgebung V von $f(x_0)$ ist $f^{-1}(V)$ Umg. von x_0 (*)

erhalten damit

Satz: (Hausdorff 1914) Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind äquivalent:

(i) f stetig auf $\mathbb{R}^n$

(ii) Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ offen in $\mathbb{R}^n$

(iii) Urbild $f^{-1}(A)$ jeder abg. Menge $A \subset \mathbb{R}^m$ abg. in $\mathbb{R}^n$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in f^{-1}(V)$ bel.

$f(x_0) \in V$, V offen $\Rightarrow$ V Umgebung von $f(x_0)$

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(V)$ Umgebung von x_0

somit $f^{-1}(V)$ Umgebung aller seiner Punkte, d.h. offen

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ bel.

nach (ii) ist für jede offene Umgebung V von $f(x_0)$ das Urbild $\underset{\substack{\cup\\ x_0}}{f^{-1}(V)}$ offene Umgebung von x_0 $\Rightarrow$ (*) $\Rightarrow$ f stetig in

(ii) $\Rightarrow$ (iii) A abg $\Longleftrightarrow$ $V = A^c$ offen $\underset{(ii)}{\Longrightarrow}$ $f^{-1}(V)$ offen

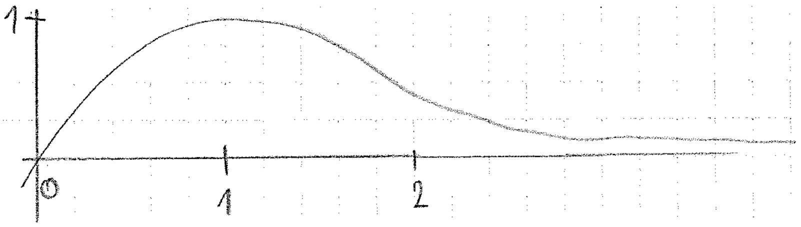
$\Longleftrightarrow$ $f^{-1}(V)^c$ abg

$$f^{-1}(V)^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \notin V\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) ebenso $\square$

Bem: f stetig, M offen / abg $\not\Rightarrow$ $f(M)$ offen / abg

Gegenbsp: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ $(m=n=1)$



$f\big(\underbrace{(0,2)}_{\text{offen}}\big) = (0,1]$ nicht offen, $f\big(\underbrace{[1,\infty)}_{\text{abg}}\big) = (0,1]$ nicht abg.

(und i.w. selbem Beweis)

Sei nun $X \subset \mathbb{R}^n$, $f: X \to \mathbb{R}^m$.

Satz bleibt richtig mit X statt $\mathbb{R}^n$ und folgenden Def.:

Menge $U \subset X$ heißt <u>X-Umgebung</u> von $x_0 \in X$, falls $\exists \delta > 0: B_\delta(x_0) \cap X \subset U$

Menge $M \subset X$ heißt <u>offen in X</u>, falls M eine X-Umgebung aller ihrer Punkte ist

(äquivalent: $\exists\, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen: $M = \mathcal{O} \cap X$)

Menge $M \subset X$ heißt <u>abg. in X</u>, falls $X \setminus A$ offen in X

(äquivalent: jede in X konvergente Folge mit Elementen in A hat Grenzwert in A)

Bem: falls X offen in $\mathbb{R}^n$: M offen / abg. in X $\Leftrightarrow$ M offen / abg. in $\mathbb{R}^n$

<u>Def</u>: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$

$f: X \to Y$ heißt <u>Homöomorphismus</u>, falls

f bijektiv ist und sowohl f als auch Umkehrfn. f^{-1} stetig sind

<u>Bem</u>: f bijektiv, stetig $\not\Rightarrow$ f^{-1} stetig

Gegenbsp: Polarkoordinaten $f: (0,\infty) \times (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$\binom{r}{\varphi} \mapsto \begin{array}{l} y_1 = r\cos\varphi \\ y_2 = r \sin\varphi \end{array}$

f^{-1} nicht stetig in $(-1,0)$

<u>Folgerung:</u> $f: X \to Y$ sei Homöomorphismus;

M offen / abg. in X $\iff$ $f(M)$ offen / abg. in Y

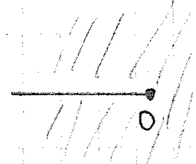
<u>Beweis:</u> $f(M) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(M)$ und voriger Satz $\square$

<u>Bsp für Homöomorphismen:</u>

1) <u>Polarkoordinaten:</u>

"geschlitzte Ebene"

$$f: (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(y_1,0) \mid y_1 < 0\}$$



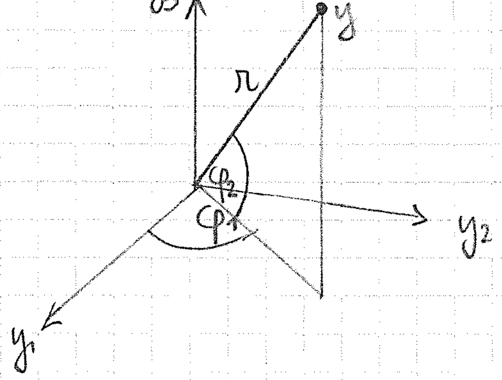
$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{array}{l} y_1 = r\cos\varphi \\ y_2 = r\sin\varphi \end{array}$$

$$\begin{array}{l} r = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ \varphi = \operatorname{sign} x_2 \cdot \arccos \frac{x_2}{r} \end{array} \longleftarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

2) <u>Kugelkoordinaten</u>

$$(0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times \left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(y_1,0,y_3) \mid y_1<0, y_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{array}{l} y_1 = r\cos\varphi_1\cos\varphi_2 \\ y_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ y_3 = r\sin\varphi_2 \end{array}$$



r Radius

φ_1 Längengrad

φ_2 Breitengrad

3) $A: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ Isomorphismus (linear, bijektiv)

A^{-1} auch linear und somit stetig

betrachten in den beiden folgenden Abschnitten stetige Funktionen auf kompakten Mengen:

4 Satz vom Maximum und Minimum, Anwendung: Äquivalenz von Normen auf $\mathbb{R}^n$

Erinnerung: $f : \underbrace{[a,b]}_{\text{abg., beschr. Intervall}} \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f nimmt Max und Min. an (Weierstraß)

Satz und Beweis übertragen sich auf $f : K \to \mathbb{R}$ mit $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

Beweis beruht auf

Satz 1: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Rightarrow$ $f(K)$ kompakt

Beweis: Sei $y_k = f(x_k)$ mit $x_k \in K$ bel. Folge in $f(K)$

K kompakt $\Rightarrow$ (x_k) hat konv. Teilfolge (x_k') mit

$x := \lim x_k' \in K$

f stetig $\Rightarrow$ $\underbrace{f(x)}_{\in f(K)} = \lim \underbrace{f(x_k')}_{y_k'}$

$\Rightarrow$ (y_k) hat konv. Teilfolge (y_k') mit Grenzwert in $f(K)$

somit $f(K)$ kompakt $\square$

Satz 2: (Satz vom Maximum und Minimum)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : K \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ $\exists\, \underline{x}, \overline{x} \in K \quad \forall x \in K : \quad f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\overline{x})$

Beweis: $f(K)$ nach S.1 kompakt, also abg und beschränkt

$f(K) \neq \emptyset$, beschränkt $\Rightarrow$ $\exists\, s := \sup f(K) \in \mathbb{R}$, haben $f(x) \le s$ $\forall x$

$\exists$ Folge $y_k = f(x_k) \in f(K)$ mit $y_k \to s$

da $f(K)$ abg: $s \in f(K)$, d.h. $\exists \overline{x} \in K : s = f(\overline{x})$, somit $\overline{x}$ Maximum

Minimum ebenso $\square$

zeigen als Anwendung von Satz 2:

<u>Satz 3:</u> Je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind zueinander äquivalent.

<u>Beweis:</u> Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.

zeigen: $\|\cdot\|$ äquivalent zur euklid. Norm, d.h.

$$\exists\, C>0,\ c>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad c\,\|x\|_2 \leq \|x\| \leq C\,\|x\|_2$$

(a) obere Schranke: Sei $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te}$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \\ &\leq |x_1|\cdot\|e_1\| + \dots + |x_n|\cdot\|e_n\| && (\Delta\text{-Ungl.}) \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2+\dots+|x_n|^2}\ \underbrace{\sqrt{\|e_1\|^2+\dots+\|e_n\|^2}}_{=:\,C} && (\text{Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

somit $\|x\| \leq C\,\|x\|_2$

(b) untere Schranke: Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$

K beschränkt ✓

abg, denn: $\|x_k\|_2 = 1$, $x_k \to a \Rightarrow \|a\|_2 = 1$

def. $f: K \to \mathbb{R}$: $f(u) = \|u\|$ Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf K

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $u = \frac{x}{\|x\|_2} \in K$

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \cdot \|x\|_2 = f(u)\cdot\|x\|_2$$

nach S.2 $\exists\, \underline{u} \in K \quad \forall u \in K : \quad f(\underline{u}) \leq f(u)$

da $\|\underline{u}\|_2 = 1$, ist $\underline{u} \neq 0$, also $f(\underline{u}) = \|\underline{u}\| =: c > 0$

somit $\|x\| \geq c\,\|x\|_2$

da Normäquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf $\mathbb{R}^n$, folgt Beh. des Satzes □

5 Gleichmäßige Stetigkeit, Anwendung: Integrale mit Parametern

<u>Def</u>: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}^m$ heißt <u>glm stetig</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_0, x \in X, \ \|x - x_0\| < \delta : \ \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

selbe Def. wie in $\mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ statt $|\cdot|$

<u>Satz 1</u>: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: K \to \mathbb{R}^m$ stetig
$\Rightarrow$ f glm stetig

(Bem: Analysis I $n = m = 1$, $K = [a, b]$ S.v. Heine Kap III, §4)

<u>Beweis</u>: wie in Analysis I, oder wie folgt: Sei $\varepsilon > 0$ bel.

f stetig $\Rightarrow$ $\forall x_0 \in K \ \exists \delta(x_0) > 0 \ \forall x \in X, \|x - x_0\| < \delta(x_0)$:

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

setze $U_{x_0} = B_{\delta(x_0)/2}(x_0)$

klar: $K \subset \bigcup_{x_0 \in K} U_{x_0}$

Heine-Borel (I., §4, S.2): $\exists x_1, \dots, x_m \in K$: $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{x_j}$

setze $\delta = \min_{j=1,\dots,m} \delta(x_j) > 0$

Seien $x, x_0 \in K$ mit $\|x - x_0\| < \frac{\delta}{2}$

da $x \in K$: $\exists j \in \{1, \dots, m\}$: $x \in U_{x_j} = B_{\delta(x_j)/2}(x_j)$

also $\|x - x_j\| < \frac{1}{2}\delta(x_j) \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \|f(x) - f(x_j)\| < \varepsilon$

$\|x_0 - x_j\| \leq \|x_0 - x\| + \|x - x_j\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta(x_j)}{2} \leq \delta(x_j)$

$$\Rightarrow \|f(x_0) - f(x_j)\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \| f(x) - f(x_0) \| \leq \| f(x) - f(x_j) \| + \| f(x_j) - f(x_0) \| < 2\varepsilon$$

damit gezeigt: $\exists \delta > 0 : \forall x, x_0 \in K,\ \|x - x_0\| < \delta : \quad \| f(x) - f(x_0) \| < 2\varepsilon$

somit $f : K \to \mathbb{R}^m$ glm. stetig. $\square$

zeigen als Anwendung von S.1:

Satz 2: Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig

$$F(p) := \int_a^b f(x,p)\,dx \qquad \text{für } p \in [c,d]$$

(Integral mit Parameter)

$\Rightarrow \quad F : [c,d] \to \mathbb{R}$ ist stetig

Beweis: $K = [a,b] \times [c,d]$ kompakt in $\mathbb{R}^2$

nach S.1 $f : K \to \mathbb{R}$ glm. stetig, d.h.

$$(*) \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x,p), (x_0,p_0) \in K,\ \|(x,p) - (x_0,p_0)\| < \delta : \\ \qquad |f(x,p) - f(x_0,p_0)| < \varepsilon \end{cases}$$

Sei $p_0 \in [c,d]$, zeigen: F stetig in p_0

Sei dazu (p_k) Folge in $[c,d]$, $p_k \to p_0$

def. dazu Funktionenfolge $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_k(x) := f(x, p_k)$$

wegen $(*)$ (mit $x_0 = x$):

$$f_k(x) \longrightarrow f(x,p_0) \qquad \text{konv. glm auf } [a,b]$$

nach Satz aus Analysis I daher:

$$\lim_{k\to\infty} F(p_k) = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x,p_0)\,dx = F(p_0)$$

somit F stetig in p_0, $\forall p_0 \in [c,d]$ $\square$

6 Konstruktion stetiger Funktionen durch glm Konvergenz, Beispiel Peano-Hilbert-Kurve

wie in $\mathbb{R}$:

Def: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$. Eine Folge von Funktionen $f_k : X \to \mathbb{R}^m$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{R}^m$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K > 0 \;\; \forall k \geq K \;\; \forall x \in X : \;\; \| f_k(x) - f(x) \| < \varepsilon$$

Satz 1: Sei $X \subset \mathbb{R}^n$, $f_k : X \to \mathbb{R}^m$ stetig $\forall k \in \mathbb{N}$

Falls (f_k) glm konvergiert, ist die Grenzfunktion stetig.

Beweis: wie in $\mathbb{R}$ (Anal. I, Kap. III, §4) $\square$

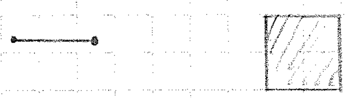
Ebenso gilt auch wieder das Cauchy-Kriterium für glm. Konvergenz:

(f_k) glm konvergent

$$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K > 0 \;\; \forall k \geq K \;\; \forall \ell \geq 1 \;\; \forall x \in X : \;\; \| f_k(x) - f_{k+\ell}(x) \| < \varepsilon$$

Cantor (1878): $\exists$ bijektive Abbildung $[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$

(nicht stetig)



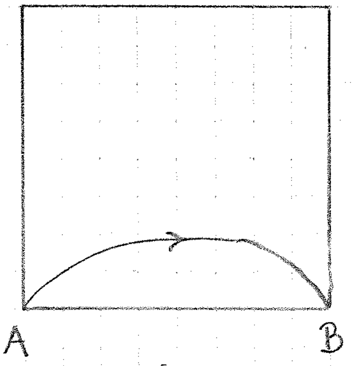
hier ohne Beweis

Peano, Hilbert (um 1890):

$\exists$ surjektive stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$

geometr. Interpretation: Kurve, die ein Quadrat ausfüllt

Konstruktion als Grenzfunktion einer glm. konvergenten Funktionenfolge wie folgt:



φ

Sei $\varphi : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$

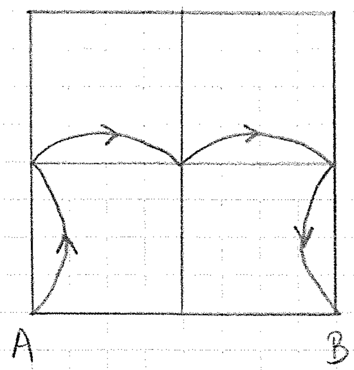
bel. Kurve im Quadrat von A nach B,

d.h., φ stetig mit

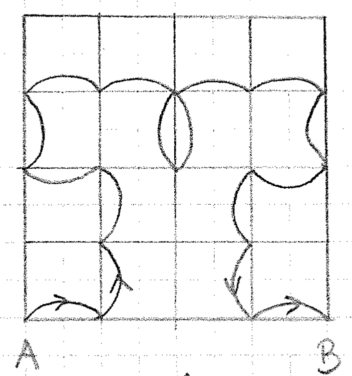
$$\varphi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreibe $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}$

konstruiere neue Kurve $\hat{\varphi}$ von A nach B durch



$\hat{\varphi}$



$\hat{\hat{\varphi}}$

. . .

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta(4t) \\ \xi(4t) \end{pmatrix} & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi(4t-1) \\ 1 + \eta(4t-1) \end{pmatrix} & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi(4t-2) \\ 1 + \eta(4t-2) \end{pmatrix} & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 - \eta(4t-3) \\ 1 - \xi(4t-3) \end{pmatrix} & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

setze $\varphi_1(t) = \hat{\varphi}(t)$

$\varphi_2(t) = \hat{\varphi}_1(t) = \hat{\hat{\varphi}}(t)$

$\varphi_3(t) = \hat{\varphi}_2(t)$

usw.

Sei $\psi : [0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ weitere Kurve von A nach B

haben $\quad \| \varphi(t) - \psi(t) \|_\infty \leq 1 \qquad \forall t \in [0,1]$

$\| \hat{\varphi}(t) - \hat{\psi}(t) \|_\infty \leq \frac{1}{2}$ — " —

$\vdots$

$\| \varphi_k(t) - \psi_k(t) \|_\infty \leq \frac{1}{2^k}$ — " —

wähle speziell $\psi = \varphi_l \Rightarrow \psi_k = \varphi_{k+l}$

somit $\quad \| \varphi_k(t) - \varphi_{k+l}(t) \| \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall t \in [0,1] \quad \forall l \geq 1$

nach Cauchy' Kriterium für glm. Konvergenz: (φ_k) konv. glm

setze $f(t) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(t)$, nach S.1 : f stetig auf $[0,1]$

zeigen noch $f : [0,1] \to [0,1]^2$ <u>surjektiv</u>

Sei $y_0 \in [0,1]^2$ bel.

nach Konstruktion $\forall k \in \mathbb{N} \ \exists t_k \in [0,1] : \| \varphi_k(t_k) - y_0 \|_\infty < \frac{1}{2^k}$

nach S.v. Bolzano-Weierstraß: (t_k) hat konv. Teilfolge

$t'_k = t_{\sigma(k)} \to t_0 \in [0,1] \qquad 0 < \sigma(1) < \sigma(2) < \dots$

$$\| f(t_0) - y_0 \| \leq \underbrace{\| f(t_0) - f(t'_k) \|}_{\substack{\to 0 \\ \text{da } f \text{ stetig}}} + \underbrace{\| f(t'_k) - \varphi_{\sigma(k)}(t'_k) \|}_{< \frac{1}{2^k}} + \underbrace{\| \varphi_{\sigma(k)}(t'_k) - y_0 \|}_{< \frac{1}{2^k}}$$

$\Rightarrow f(t_0) = y_0$

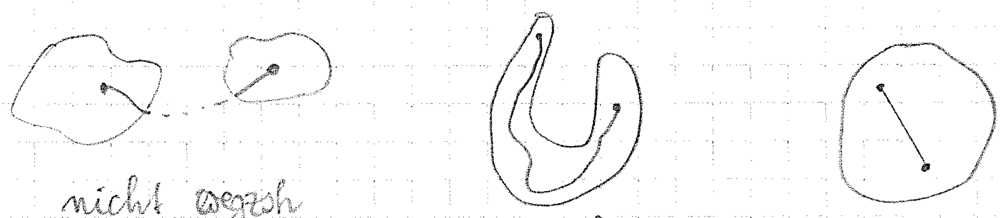
somit f surjektiv

7 Wegzusammenhängende Mengen, Zwischenwertsatz

<u>Def</u>: Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>wegzusammenhängend</u>, falls

$$\forall x_0, x_1 \in X \quad \exists \underbrace{\gamma : [0,1] \to X \text{ stetig mit } \gamma(0) = x_0,\ \gamma(1) = x_1}_{\text{Weg in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } x_1}$$

d.h., falls je zwei Punkte durch einen in X verlaufenden Weg verbunden werden können.



nicht wegzsh   wegzsh   konvex

<u>Bsp</u>: <u>konvexe Menge</u>: zu je zwei Punkten in X liegt auch die Verbindungsstrecke in X:

$$\forall x_0, x_1 \in X \quad \forall \theta \in [0,1] : \quad \theta x_0 + (1-\theta) x_1 \in X$$
$$\theta x_0 + (1-\theta) x_1 = x_0 + (1-\theta)(x_1 - x_0)$$

<u>Bsp</u>: $X \subset \mathbb{R}$ wegzsh $\iff$ X Intervall, d.h. $\forall x_0, x_1 \in X : [x_0, x_1] \subset X$

($\Leftarrow$) klar, ($\Rightarrow$) Sei γ Weg in X von x_0 nach x_1

nach ZWS: $\forall x$ zwischen x_0 und x_1 $\exists \theta \in [0,1] : \gamma(\theta) = x$

<u>Satz 1</u>: $X \subset \mathbb{R}^n$ wegzsh, $f : X \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Rightarrow f(X)$ wegzsh

<u>Beweis</u>: Seien $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1) \in f(X)$

Sei γ Weg in X von x_0 nach x_1

$\Rightarrow f \circ \gamma$ Weg in $f(X)$ von y_0 nach y_1 $\square$

<u>Satz 2:</u> (Zwischenwertsatz)

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ wegzsh., $f: X \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0, x_1 \in X$

$\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(x_0)$ und $f(x_1)$ $\exists \xi \in X$: $f(\xi) = c$

<u>Beweis:</u> nach S.1 ist $f(X) \subset \mathbb{R}$ wegzsh, also Intervall (s.o.) □

als weitere Anwendung von S.1 erhalten:

- $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ sind nicht homöomorph.

  (d.h., es gibt keinen Homöomorphismus $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$)

<u>Beweis:</u> indirekt: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ bij, f, f^{-1} stetig

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ bel., $y_0 = f(x_0)$

f bij $\Rightarrow$ $f^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{y_0\}}_{\text{wegzsh.}}) = \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{x_0\}}_{\text{nicht wegzsh}}$ im Wspr. zu S.1 ↯

<u>Bem:</u> ebenso $[0,1]$ und $[0,1]^2$ nicht homöomorph

beachte: Peano-Hilbert-Kurve stetig, surjektiv, <u>nicht</u> injektiv

<u>Bem:</u> Brouwer (1911): $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph für bel. $m \neq n$ (hier ohne Beweis)