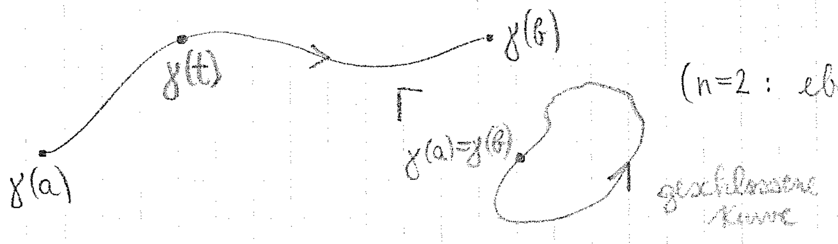
# VI. Kurven- und Oberflächenintegrale

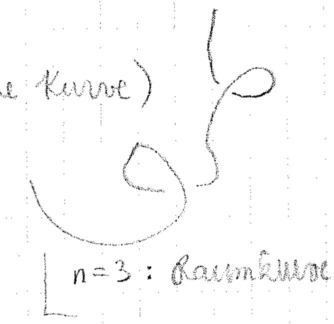
## 1 Kurven, Bogenlänge, Kurvenintegral

<u>parametrisierte Kurve</u> (Weg) $\quad \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig

<u>Spur</u> (Bild der Kurve) $\quad \Gamma = \gamma([a,b]) = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$

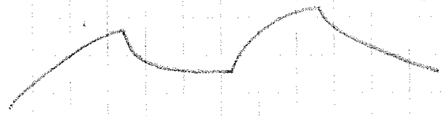



(n=2 : ebene Kurve)




$\gamma$ heißt auch <u>Parametrisierung</u> von $\Gamma$

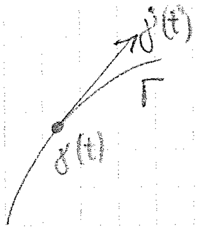
$\gamma$ <u>stückweise stetig diffbar</u>, falls $[a,b]$ in endlich viele abg. Teilintervalle zerlegt werden kann, auf denen $\gamma$ stetig diffbar ist.



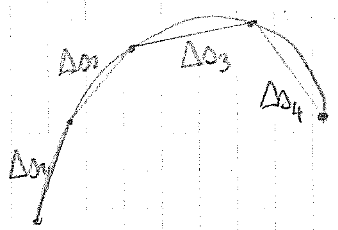
$\gamma$ <u>reguläre Parametrisierung</u> von $\Gamma$, falls
(i) $\gamma|_{[a,b]\setminus N}$ injektiv, wobei $N$ endliche Teilmenge von $[a,b]$
(ii) $\gamma$ stw. stetig diffbar

$\dot\gamma(t) \neq 0$ heißt <u>Tangentialvektor</u> an $\Gamma$ in $\gamma(t)$

<u>Tangente</u>: $\gamma(t) + \mathbb{R}\dot\gamma(t)$




<u>Bogenlänge der Kurve</u>:




Summe der Sehnenlängen

$$\sum_{j=1}^{N} \Delta s_j = \sum_{j=1}^{N} \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2 = \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\|_2 (t_j - t_{j-1})$$

$\downarrow$ (gute Ü)

$$\int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt \qquad \text{Bogenlänge}$$

**Def:** Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ reguläre Parametrisierung von $\Gamma$.
Sei $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ stetig (oder stw. stetig)

$$\int_\Gamma f \, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt$$

heißt <u>Kurvenintegral</u> von $f$ über $\Gamma$

**HS:** (Invarianz des Kurvenintegrals unter Umparametrisierung)
Sei $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ reguläre Parametrisierung von $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$
$\alpha : [\hat a, \hat b] \to [a,b]$ stetig diffbar, bijektiv
$\hat\gamma = \gamma \circ \alpha : [\hat a, \hat b] \to \Gamma$ weitere (reg.) Parametrisierung von $\Gamma$

$$\Longrightarrow \int_{\hat a}^{\hat b} f(\hat\gamma(\hat t)) \, \|\dot{\hat\gamma}(\hat t)\|_2 \, d\hat t = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt$$

**Beweis:** Kettenregel $\dot{\hat\gamma}(\hat t) = \dot\gamma(\alpha(\hat t)) \, \dot\alpha(\hat t)$
Substitution $t = \alpha(\hat t)$

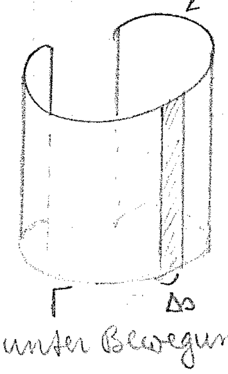
$$dt = |\dot\alpha(\hat t)| \, d\hat t \qquad \square$$

**Bsp:** 1) Bogenlänge $\int_\Gamma 1 \, ds$

2) Draht der Form $\Gamma$ mit Dichte $\rho(x)$, $x \in \Gamma$

$$\sum_{j=1}^N \rho(\gamma(t_j)) \, \Delta s_j \longrightarrow \int_\Gamma \rho \, ds \qquad \text{Masse}$$

3) Zylinderfläche $\qquad z = f(x(t), y(t))$ Höhe $\qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$




$$\sum_{j=1}^N f(x(t_j), y(t_j)) \, \Delta s_j \longrightarrow \int_\Gamma f \, ds$$

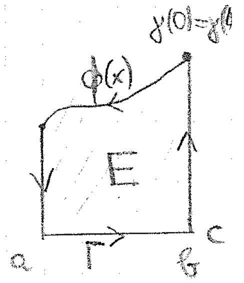
Bem (Ü): Invarianz unter Bewegungen $\tilde\Gamma = Q\Gamma + c$, $Q$ orth $\Rightarrow \int_{\tilde\Gamma} f \, d\tilde s = \int_\Gamma f \, d$

## 2 Zweidimensionale partielle Integration, Green-Riemann' Formel

$A \subset \mathbb{R}^2$ , $f, g : A \to \mathbb{R}$

$$\int_A f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, dx = \; ? \; - \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x)\, dx$$

überlegen dies zunächst für einfache Gebiete:

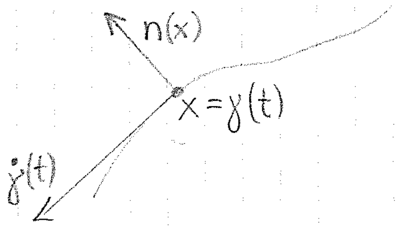



$E \subset \mathbb{R}^2$ heißt Elementarviereck, falls

$$E = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x_1 \leq b,\; c \leq x_2 \leq \phi(x_1) \},$$

wobei $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar

$\Gamma = \partial E$ ist Spur einer stw. $C^1$-Kurve $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$



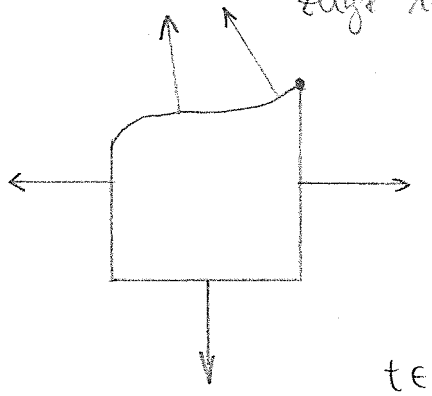

$$\gamma(0) = \gamma(4) = \begin{pmatrix} b \\ \phi(b) \end{pmatrix}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} b - t(b-a) \\ \phi(b - t(b-a)) \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\dot\gamma(t) = -(b-a) \begin{pmatrix} 1 \\ \dot\phi(x_1) \end{pmatrix} \qquad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \gamma(t) \quad \text{Tangentialvektor}$$

äußerer Normaleneinheitsvektor $n(x)$ für $x \in \Gamma$ (außer in Ecken):

$n(x) \in \mathbb{R}^2$ orthogonal auf Tangentialvektor,
zeigt in das Äußere von E , $\|n(x)\|_2 = 1$



$x = \gamma(t)$ , $t \in (0,1)$:

$$n(x) = \begin{pmatrix} n_1(x) \\ n_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot\phi(x_1) \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot\phi(x_1)^2}}$$

$t \in (0,2)$: $n(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $t \in (0,3)$: $n(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$t \in (0,4)$: $n(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**HS:** (partielle Integration auf Elementarviereck)

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen

Sei $E \subset U$ Elementarviereck, $n = \binom{n_1}{n_2} : \partial E \to \mathbb{R}^2$ äußerer Normaleneinheitsvektor

$$\Longrightarrow \int_E f \cdot \partial_i g \, dx = \int_{\partial E} f g n_i \, ds - \int_E \partial_i f \cdot g \, dx \qquad (i = 1,2)$$

ausführlicher: $$\int_E f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, dx = \int_0^4 f(\gamma(t))\, g(\gamma(t))\, n_i(\gamma(t)) \sqrt{\dot\gamma_1(t)^2 + \dot\gamma_2(t)^2}\, dt$$
$$- \int_E \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g(x)\, dx$$

**Beweis:** $$\int_E f \cdot \partial_i g \, dx + \int_E \partial_i f \cdot g \, dx = \int_E \partial_i (fg)\, dx$$

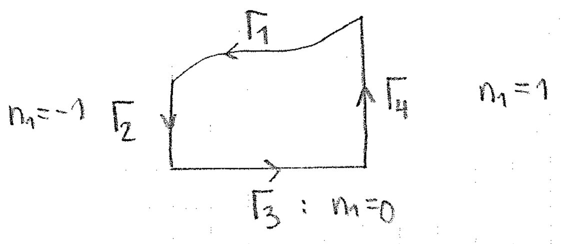
setze $u := fg$

$i = 1$:

$$\int_E \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2)\, d(x_1, x_2) = \int_a^b \int_c^{\varphi(x_1)} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 =$$

$$= \int_a^b \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \int_c^{\phi(x_1)} u(x_1, x_2)\, dx_2 - u(x_1, \phi(x_1))\, \dot\phi(x_1) \right) dx_1$$

$$= \int_c^{\phi(b)} u(b, x_2)\, dx_2 - \int_c^{\phi(a)} u(a, x_2)\, dx_2 - \int_a^b u(x_1, \phi(x_1))\, \dot\phi(x_1)\, dx_1 =$$




$$\Gamma_1 : \quad n_1 = \frac{-\dot\phi(x_1)}{\sqrt{1 + \dot\phi(x_1)^2}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \dot\phi(x_1)^2}\, dx_1$$

$$= \int_{\Gamma_4} u n_1 \, ds + \int_{\Gamma_2} u n_1 \, ds + \int_{\Gamma_1} u n_1 \, ds + \underbrace{\int_{\Gamma_3} u n_1 \, ds}_{=0} =$$

$$= \int_{\partial E} u n_1 \, ds$$

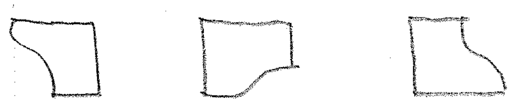
$i=2$: $\displaystyle\int_E \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)\, d(x_1,x_2) = \int_a^b \int_c^{\phi(x_1)} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)\, dx_2\, dx_1 =$

$$= \int_a^b \big( u(x_1,\phi(x_1)) - u(x_1,c) \big)\, dx_1$$

$$= \int_{\Gamma_1} u \underbrace{n_2}_{\frac{1}{\sqrt{1+\dot\phi(x_1)^2}}} \underbrace{ds}_{\sqrt{1+\dot\phi(x_1)^2}\, dx_1} + \int_{\Gamma_3} u \underbrace{n_2}_{-1} \underbrace{ds}_{dx_1} + \int_{\Gamma_2} u \underbrace{n_2}_{0} ds + \int_{\Gamma_4} u \underbrace{n_2}_{0} d$$

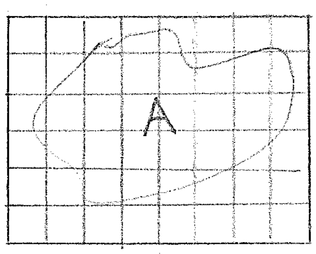
$$= \int_{\partial E} u n_2\, ds \qquad \square$$

ebenso (oder besser mit Bewegungsinvarianz) zeigt man:
Formel bleibt richtig für gedrehte Elementarvierecke



setzen daraus kompliziertere Bereiche zusammen:

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt, enthalten in Rechteck $Q$.
Falls eine Zerlegung von $Q$ in Rechtecke $Q_j$ existiert, sodaß $Q_j \cap A$ ein (gedrehtes) Elementarviereck oder leer ist ($\forall j = 1, \dots, N$)
so nennen wir $A$ ein <u>Regelgebiet</u>.




Bem: $A$ Regelgebiet $\Longleftrightarrow$ $\partial A = \Gamma_1 \dot\cup \dots \dot\cup \Gamma_m$, wobei $\Gamma_i$ reguläre Parametrisierungen $\gamma_i$ haben setze dann $\int_{\partial A} f \, ds = \int_{\Gamma_1} f \, ds + \dots + \int_{\Gamma_m} f \, ds$

<u>Satz 1:</u> (zweidimensionale partielle Integration) (Green 1828)

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen

Sei $A \subset U$ Regelgebiet

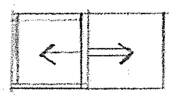
$\Longrightarrow$

$$\int_A f \cdot \partial_i g \, dx = \int_{\partial A} f g \, n_i \, ds - \int_A \partial_i f \cdot g \, dx$$

<u>Beweis:</u> $\int_A f \partial_i g \, dx = \sum_{j=1}^{N} \int_{Q_j \cap A} f \partial_i g \, dx$

wende darauf HS an

beachte: auf inneren Kanten ist



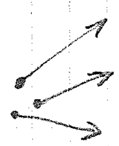
äußere Normale = − äußere Normale des Nachbarvierecks

$\Rightarrow$ Beiträge innerer Kanten in $\sum_{j=1}^{N} \int_{\partial(Q_j \cap A)} f g \, n_i \, ds$ heben sich auf,

es bleibt nur $\int_{\partial A} f g \, n_i \, ds$ übrig $\square$

Sei nun $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : A \to \mathbb{R}^2$ <u>Vektorfeld</u>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$



Bsp: Geschwindigkeit einer strömenden Flüssigkeit am Ort $(x_1, x_2)$

haben mit S.1:

$$\int_A \partial_i u_i \, dx = \int_{\partial A} u_i n_i \, ds \qquad (i=1,2)$$

summiere und erhalte als Folgerung

<u>Satz 2</u>: (2-dim. Gauß' Integralsatz) (Gauß 1840)

Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^2$ stetig diffbar ($U \subset \mathbb{R}^2$ offen), $A \subset U$ Regelgebiet

$$\Longrightarrow \quad \int_A (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) \, dx = \int_{\partial A} \langle u, n \rangle \, ds$$ □

<u>Bem</u>: physikalische Interpretation

$\begin{pmatrix} v_1(x_1,x_2) \\ v_2(x_1,x_2) \end{pmatrix}$ Geschwindigkeit einer Flüssigkeit am Ort $(x_1,x_2)$
(stationär: unabh. von der Zeit)

$\rho$ Massedichte (nehmen an: konstant)

$u := \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_2 \end{pmatrix}$

$\int_{\partial A} \langle u, n \rangle \, ds$ Massefluß durch $\partial A$

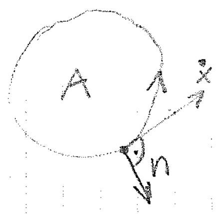
$= 0$, falls Flüssigkeit inkompressibel
und keine Quellen oder Senken in A

gilt für alle Kontrollgebiete A : $\int_A (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) \, dx = 0$

$\longrightarrow$ (plausibel) $\quad \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0$ überall

(Inkompressibilitätsgleichung)

Sei $\Gamma$ Berandungskurve eines Regelgebietes $A$,
durch $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ so parametrisiert, daß $A$ links von $\Gamma$
schreibe $\gamma(t) = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$




äußere Normale: $n(x(t)) = \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)}}$

kürzt sich

$$\int_\Gamma \langle u, n \rangle \, ds = \int_\Gamma (u_1 n_1 + u_2 n_2) \, ds = \qquad ds = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \, dt$$

$$= \int_\Gamma \left( + u_1(x(t)) \, \dot{x}_2(t) - u_2(x(t)) \, \dot{x}_1(t) \right) dt$$

$$=: \int_\Gamma (+ u_1 \, dx_2 - u_2 \, dx_1) \qquad (\text{formal: } dx_i = \dot{x}_i(t) \, dt)$$

"Kurvenintegral 2. Art"

erhalte aus vorigem Satz mit $v_1 = u_2$, $v_2 = -u_1$:

**Satz 3:** (Green-Riemann' Formel) (Green 1828)

Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^2$ stetig diffbar ($U \subset \mathbb{R}^2$ offen)
Sei $\Gamma$ Berandungskurve eines Regelgebietes $A \subset U$, so parametrisiert, daß $A$ links von $\Gamma$ liegt

$$\Longrightarrow \int_\Gamma (v_1 \, dx_1 + v_2 \, dx_2) = \int_A (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \, dx$$

□

hat wichtige Anwendung in der Theorie komplexer Funktionen
→ Cauchy' Integralsatz, Analysis III

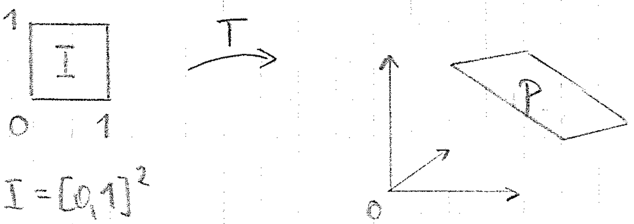
Bsp: Fläche $\mu(A) = \int_A 1 \, d(x_1, x_2) = \begin{cases} \int_\Gamma x_1 \, dx_2 & (v_1 = 0, \; v_2 = x_1) \\ -\int_\Gamma x_2 \, dx_1 & (v_1 = -x_2, \; v_2 = 0) \end{cases}$

brauchen als Vorbereitung:

## 3 Flächeninhalt von Parallelogrammen im Raum

affine Abbildung $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad (n \geq 2,$ typisch $n=3)$

$$T(x) = Bx + c \qquad B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}, \; b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$$
$$= b_1 x_1 + b_2 x_2 + c$$



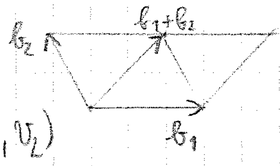
$P = T(I)$ Parallelogramm im $\mathbb{R}^n$

Flächeninhalt von $P$?

sollte folgende Eigenschaften haben: $\quad \sigma(P) = d(b_1, b_2)$ mit

(i) $d(\alpha b_1, b_2) = d(b_1, \alpha b_2) = |\alpha|\, d(b_1, b_2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

(ii) $d(b_1 + b_2, b_2) = d(b_1, b_2 + b_1) = d(b_1, b_2)$



(iii) $d(v_1, v_2) = 1$ für alle orthonormalen $(v_1, v_2)$

vgl. Volumen in $\underline{\mathrm{V}}$, §4

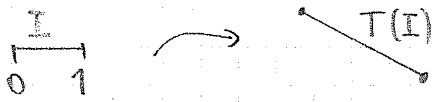
zeige wie dort: $d$ eindeutig durch (i)–(iii) festgelegt, ist erfüllt für

$$\sigma(P) = \sqrt{\det(\underbrace{B^T B}_{2\times 2})} \qquad \text{Flächeninhalt von } P$$

Bem(Ü): $\sigma(T(Q)) = \sigma(T(I))\, \mu(Q)$ für $Q \subset \mathbb{R}^2$ Rechteck

Bem: verallgemeinert Länge einer Strecke:

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad T(x) = bx + c \qquad b, c \in \mathbb{R}^n$$



$T(I)$ hat Länge $\|b\|_2 = \sqrt{\det \underbrace{b^T b}_{1\times 1}}$

(kann obige Formel auch auf $T(x) = Bx + c$ mit $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ erweitern) $n \geq p \geq 1$ bel.

## 4 Flächen im Raum, Flächeninhalt, Flächenintegral

Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, $\partial Q$ (Jordan-) Nullmenge (z.B. $Q$ Rechteck)

<u>parametrisierte Fläche</u> $\varphi : Q \to \mathbb{R}^n$ stetig (typisch: $n=3$)

Bild der Fläche $S = \varphi(Q)$


$\varphi(q_1,q_2) \in S \subset \mathbb{R}^3$

$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \in Q \subset \mathbb{R}^2$

$\varphi$ heißt auch <u>Parametrisierung</u> von $S$

$\varphi$ <u>stückweise stetig diffbar</u>, falls $Q$ in endlich viele kompakte Mengen $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_m$ zerlegt werden kann, deren Ränder Nullmengen sind und deren Innere paarweise disjunkt sind, sodaß $\varphi|_{Q_j}$ die Einschränkung einer Funktion ist, die auf einer $Q_j$ enthaltenden offenen Menge stetig diffbar ist.

$\varphi$ heißt <u>reguläre Parametrisierung</u> von $S$, falls

(i) $\varphi$ injektiv auf $A \setminus N$, wobei $N$ Nullmenge

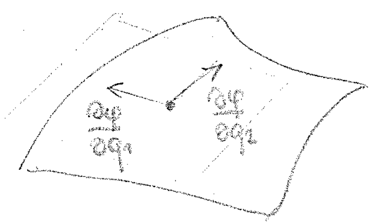
(ii) $\varphi$ stw. stetig diffbar

$v \in \mathbb{R}^n$ <u>Tangentialvektor</u> an $S$ in $x = \varphi(q)$, falls es einen diffbaren Weg $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ auf $S$ gibt, sodaß $\gamma(0) = x$, $\dot\gamma(0) = v$

Falls $q$ innerer Punkt von $Q$ und $\varphi$ diffbar in $q$, so gilt dies genau dann, wenn $\underline{v \in \operatorname{Im} D\varphi(q)} = \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}(q) + \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}(q)$

(denn für $q(t)$ bel. Weg in $Q$ mit $q(0) = q$ ist mit $\gamma(t) = \varphi(q(t)) \in S$

$\dot\gamma(0) = D\varphi(q)\,\dot q(0)$ )

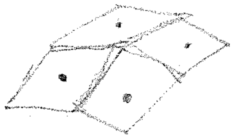



<u>Tangentialebene</u> (falls $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}$ l.u.)

$\varphi(q) + \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}(q) + \mathbb{R}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}(q)$

zerlege $Q$ in $(Q_j, \xi_j)$

## Flächeninhalt :



$$\varphi(x) \approx \underbrace{\varphi(\xi_j) + D\varphi(\xi_j)(x-\xi_j)}_{= T_j(x)}$$

stelle mir die Fläche aus kleinen Parallelogrammen angenähert vor:

$$\sum_{j=1}^{N} \underbrace{\sigma(T_j(Q_j))}_{\Delta\sigma_j} = \sum_{j=1}^{N} \sigma(T_j(I))\,\mu(Q_j) \underset{§3}{=} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{\det D\varphi(\xi_j)^T D\varphi(\xi_j)}\,\mu(Q_j)$$

$$\downarrow$$

Flächeninhalt def. als $\int_Q \sqrt{\det D\varphi(q)^T D\varphi(q)}\,dq$

**Def:** Sei $\varphi : Q \to \mathbb{R}^n$ reguläre Parametrisierung der Fläche $S$
Sei $f : S \to \mathbb{R}$ stetig (oder stw. stetig)

$$\int_S f\,d\sigma := \int_Q f(\varphi(q)) \sqrt{\underbrace{\det D\varphi(q)^T D\varphi(q)}_{\text{Gram' Determinante}}}\,dq$$

heißt <u>Flächenintegral</u> von $f$ über $S$.

**Bsp:** 1) Flächeninhalt $\int_S 1\,d\sigma$

2) Blatt der Form $S$ mit Dichte $\rho(x)$, $x \in S$

$$\int_S \rho\,d\sigma \qquad \text{Masse}$$

**HS:** (Invarianz des Flächenintegrals unter Umparametrisierung)
Formulierung und Beweis analog Kurvenintegral (§1)

$\hat{\varphi} = \varphi \circ \alpha \qquad \alpha : \hat{Q} \to Q$ bijektiv, stetig diffbar auf $U \supset \hat{Q}$ offen

(verwende 2-dim Kettenregel und 2-dim. Transformationsformel)

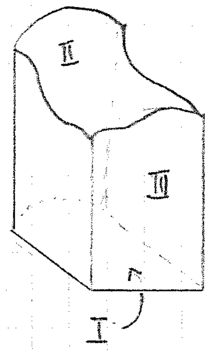
$$q = \alpha(\hat{q}) \qquad dq = |\det D\alpha(\hat{q})|\,d\hat{q}\,, \quad D\hat{\varphi}(\hat{q}) = D\varphi(q)\,D\alpha(\hat{q})$$

$$\sqrt{\det D\hat{\varphi}(\hat{q})^T D\hat{\varphi}(\hat{q})} = \sqrt{\det D\alpha(\hat{q})^T \det D\varphi(q)^T D\varphi(q) \det D\alpha(\hat{q})} = \sqrt{\det D\varphi(q)^T D\varphi(q)}\,|\det D\alpha(\hat{q})|$$

# 5 Dreidimensionale partielle Integration, Integralsatz von Gauß

$A \subset \mathbb{R}^3$ , $f, g : A \to \mathbb{R}$ $\qquad \int_A f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\, dx = ?$ $\quad (i = 1,2,3)$

gehen vor wie in §2:




$E \subset \mathbb{R}^3$ heißt <u>Elementarbereich</u>, falls

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x_1, x_2) \in E', \; e \leq x_3 \leq \psi(x_1, x_2) \right\}$$

mit $E'$ Elementarviereck in $\mathbb{R}^2$, $\psi$ stetig diffbar

$S = \partial E$ hat reguläre Parametrisierung, zusammengesetzt aus

I: $\quad \varphi_I(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ e \end{pmatrix}$ , $(q_1, q_2) \in E'$ $\qquad$ (Bodenplatte)

II: $\quad \varphi_{II}(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \psi(q_1, q_2) \end{pmatrix}$ $\quad \ldots$ $\qquad$ (Deckfläche)

III: $\quad \varphi_{III}(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \cdot (\psi(x_1, x_2) - e) \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \gamma(q_1)$ , $0 \leq q_1 \leq 1$

$\gamma$ Berandungskurve von $E'$

$\theta = q_2$ , $0 \leq q_2 \leq 1$

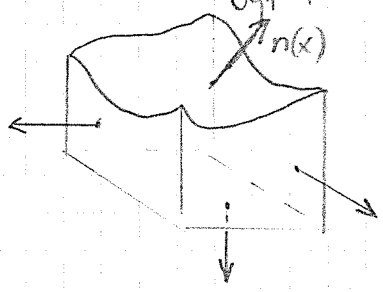
(Seitenfläche)

<u>Äußere Normale</u> $n(x)$ für $x = \varphi(q) \in S$ (außer auf Kanten und in Ecken,

$n(x) \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf Tangentialvektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}(q)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}(q)$,

zeigt in das Äußere von $E$

$\| n(x) \|_2 = 1$




$x = \varphi(q_1, q_2) \in S$

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}(q_1, q_2)$ , $v = \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^3$

Kreuzprodukt: def. $u \times v \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\det(u,v,w) = \langle u \times v, w \rangle \qquad \forall w \in \mathbb{R}^3$$

insbes. $u \times v$ orthogonal auf $u, v$

wähle $w = e_1, e_2, e_3$, erhalte

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -u_1 v_3 + u_3 v_1 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \langle u,u \rangle & \langle u,v \rangle \\ \langle v,u \rangle & \langle v,v \rangle \end{pmatrix} = \| u \times v \|_2^2 \qquad \text{durch Nachrechnen}$$

somit: $$\sqrt{\det D\varphi(q)^T D\varphi(q)} = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}(q) \times \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}(q) \right\|_2 \qquad (*)$$

und $$n(x) = \pm \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}(q) \times \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}(q)}{\| \quad \text{"} \quad \|_2} \qquad (**)$$

(kann $\varphi$ so wählen, daß $n(x) = + \ldots$ )

HS: (partielle Integration auf Elementarbereich)

Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen

Sei $E \subset U$ Elementarbereich, $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ äußere Normale auf $\partial E$

$$\Longrightarrow \int_E f \cdot \partial_i g \, dx = \int_{\partial E} f g \, n_i \, d\sigma - \int_E \partial_i f \cdot g \, dx \qquad (i = 1,2,3)$$

Bem: $$\int_{\partial E} f g \, n_i \, d\sigma = \int_Q f(\varphi(q)) \, g(\varphi(q)) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}(q) \times \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}(q) \right)_i dq$$

i-te Komponente

falls $n = + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \Big/ \| \text{"} \|_2$

<u>Beweis:</u> (analog §2) setze wieder $u := fg$

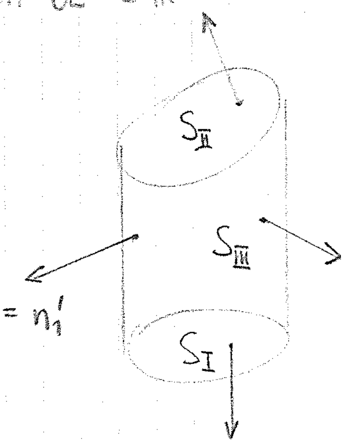
<u>i=1</u>: $\displaystyle\int_E \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)\, d(x_1,x_2,x_3) =$

$$= \int_{E'} \int_e^{\psi(x_1,x_2)} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)\, dx_3\, d(x_1,x_2) =$$

$$= \int_{E'} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \int_e^{\psi(x_1,x_2)} u(x_1,x_2,x_3)\, dx_3 - u(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2)) \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1,x_2) \right) d(x_1,x_2)$$

$$\underset{§2}{=} \int_{\partial E'} \int_e^{\psi(x_1,x_2)} u(x_1,x_2,x_3)\, dx_3 \cdot \underset{\uparrow}{n_1'}\, ds - \int_{E'} \int_e^{\psi(x_1,x_2)} u(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2)) \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1,x_2)\, d(x_1,x_2)$$

$n' = \begin{pmatrix} n_1' \\ n_2' \end{pmatrix}$ äußere Normale an $\partial E' \subset \mathbb{R}^2$




$$= \int_{S_{III}} u n_1\, d\sigma + \int_{S_{II}} u n_1\, d\sigma + \int_{S_I} u n_1\, d\sigma$$

$n = \begin{pmatrix} n' \\ 0 \end{pmatrix}$ : $n_1 = n_1'$

$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $n_1$=

auf $S_I$: $n_1 = 0$

auf $S_{II}$: $\displaystyle\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ +\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{(**)\\(*)}}{=} n \sqrt{\det (D\varphi_{II})^T D\varphi_{II}}$

$$n_1 \sqrt{\det (D\varphi_{II})^T (D\varphi_{II})} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

auf $S_{III}$: $n_1 = n_1'$

<u>i=2</u> ebenso

$$i=3: \quad \int_E \frac{\partial u}{\partial x_3}(x)\,dx = \int_{E'} \int_e^{\psi(x_1,x_2)} \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\,d(x_1,x_2) =$$

$$= \int_{E'} \Big( u(x_1,x_2,\psi(x_1,x_2)) - u(x_1,x_2,e) \Big)\,d(x_1,x_2)$$

$$= \int_{S_{II}} u n_3\,d\sigma + \int_{S_I} u n_3\,d\sigma + \int_{S_{III}} u n_3\,d\sigma$$

auf $S_I$ : $n_3 = -1$

auf $S_{II}$ : $n_3 \sqrt{\det (D\varphi)^T D\varphi} = 1$ aus $(*)$, $(**)$

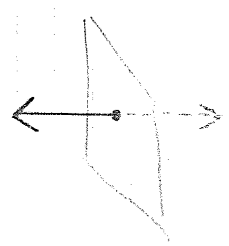
auf $S_{III}$ : $n_3 = 0$ $\square$

Formel bleibt richtig für gedrehte Elementarbereiche und für daraus zusammengesetzte Bereiche : Regelgebiet (wie in §2), erhalte

**Satz 1** : (3-dim. partielle Integration) (Green 1828)
Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen
$A \subset U$ Regelgebiet
$\Longrightarrow$

$$\int_A f \cdot \partial_i g\,dx = \int_{\partial A} f g\, n_i\,d\sigma - \int_A \partial_i f \cdot g\,dx \quad (i=1,2,3)$$

Beweis: aus HS, Beiträge innerer Flächen heben sich auf $\square$



Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorfeld

S.1 : $\displaystyle\int_A \partial_i u_i \, dx = \int_{\partial A} u_i n_i \, d\sigma \qquad i = 1,2,3$

summiere, schreibe

$$\operatorname{div} u(x) := \sum_{i=1}^{3} \partial_i u_i (x)$$ <u>Divergenz</u> des Vektorfeldes $u$ in $x$

erhalte

<u>Satz 2</u>: (Gauß' Integralsatz) Gauß 1840

Sei $u : U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbares Vektorfeld, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen

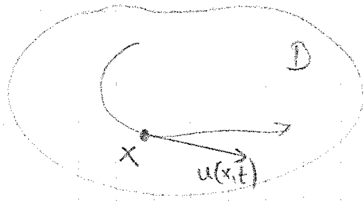
$A \subset U$ Regelgebiet

$\Longrightarrow$

$$\int_A \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial A} \langle u, n \rangle \, d\sigma$$

$\square$

## 6 Anwendung: Kontinuitätsgleichung der Fluiddynamik




Fluid (Gas, Flüssigkeit) in Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$

$x \in D$ Punkt in $D$

$u(x,t)$ Geschwindigkeit des Fluidpartikels das sich zur Zeit $t$ am Ort $x$ aufhält

für festes $t$: $u(\cdot,t): D \to \mathbb{R}^3$ Vektorfeld; heißt Geschwindigkeitsfeld

$\rho(x,t)$ Dichte des Fluids am Ort $x$ zur Zeit $t$, d.h.

für Teilgebiet $W \subset D$: $m(W,t) = \int_W \rho(x,t)\,dx$ Masse in $W$ (Kontinuumsannahme)

nehmen i.f. an: $u, \rho$ bel. oft diffbar

Herleitung der Bewegungsgleichungen aus 3 Grundprinzipien:

(i) Masse wird weder erzeugt noch vernichtet

(ii) Impulsänderung in einem Teil des Fluids = darauf angewandte Kraft (2. Newton' Gesetz)

(iii) Energie bleibt erhalten

hier nur (i): Massenerhaltung

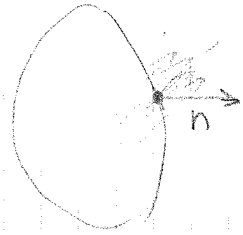
Sei $W$ festes Teilgebiet von $D$ ($W$ unabh. von $t$)

Massenänderung / Zeiteinheit:

$$\frac{d}{dt} m(W,t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(x,t)\,dx = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\,dx$$

Sei $n$ die äußere Normale an $\partial W$

Massenfluß durch $\partial W$ / Flächeneinheit :
/ Zeiteinheit




$$\langle \rho u, n \rangle$$

Massenerhaltung: Rate der Zunahme der Masse in W
= Rate, in der Masse durch $\partial W$ ins Innere fließt :

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(x,t)\, dx = - \int_{\partial W} \langle \rho u, n \rangle \, d\sigma$$

Gauß' Integralsatz:

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)\, dx = - \int_W \operatorname{div}(\rho u)\, dx$$

bzw.

$$\int_W \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \right) dx = 0$$

wähle W Kugel vom Radius $\varepsilon$ um $x$, dividiere durch $\mu(W) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$, lasse $\varepsilon \to 0$. Mit Stetigkeit von $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u)$ erhalte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}\big(\rho(x,t)\, u(x,t)\big) = 0 \qquad \forall x \in D, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

kurz:

$$\underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0}$$

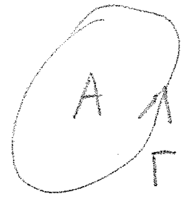
(Kontinuitätsgleichung)

# 7 Integralsatz von Stokes

Erinnerung: Green-Riemann

$v : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig diffbares Vektorfeld

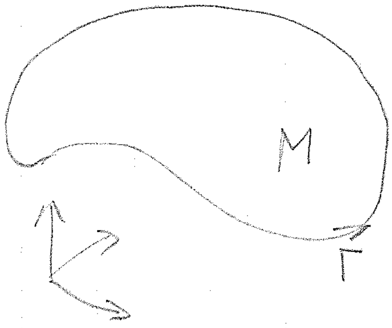
$A \subset U$ 2-dim Regelgebiet berandet durch Kurve $\Gamma$



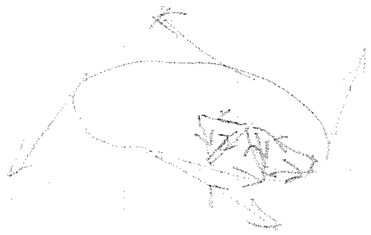

$$\int_\Gamma \langle v, dx \rangle = \int_A (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\, dx$$

$$= \int_\Gamma v_1\, dx_1 + v_2\, dx_2 = \int_a^b \Big( v_1(\gamma(t))\, \dot\gamma_1(t) + v_2(\gamma(t))\, \dot\gamma_2(t) \Big)\, dt$$

jetzt: 2-dim. Fläche $M$ im $\mathbb{R}^3$, berandet durch Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$



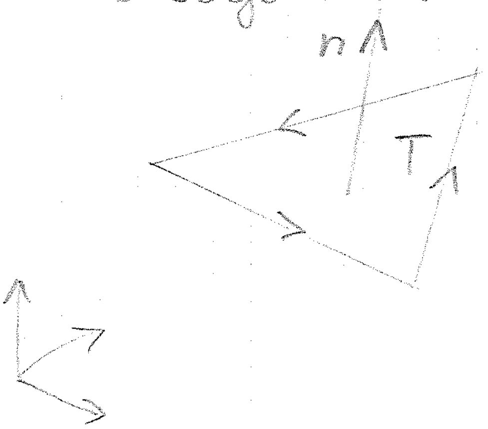

$u : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Vektorfeld



$$\underbrace{\int_\Gamma \langle u, dx \rangle}_{\text{Zirkulation des Vf.}} = \int_M ?$$

Idee: $M$ zusammengesetzt aus Dreiecken (annähernd)

untersuche Frage zunächst für Dreieck $T$



<u>HS</u> und <u>Def</u>: Sei $u : U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbares Vektorfeld ($U \subset \mathbb{R}^3$ offen)
Sei $T \subset U$ Dreieck , $\Gamma$ Randkurve von $T$
$n$ Normaleneinheitsvektor auf $T$
Orientierung von $\Gamma$ und $n$ so, dass $\dot{\gamma}(t) \times n$ außerhalb $T$ zeigt
(m.a.W.: bei Blick in Richtung $n$ wird $\Gamma$ im Uhrzeigersinn durchlaufen)

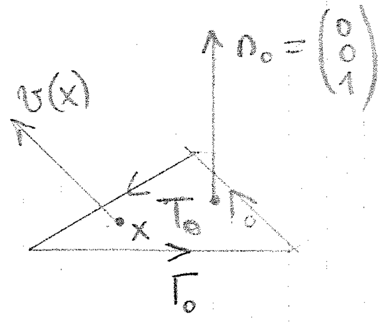
$$\Rightarrow \quad \int_\Gamma \langle u, dx \rangle = \int_T \langle \operatorname{rot} u, n \rangle \, d\sigma$$

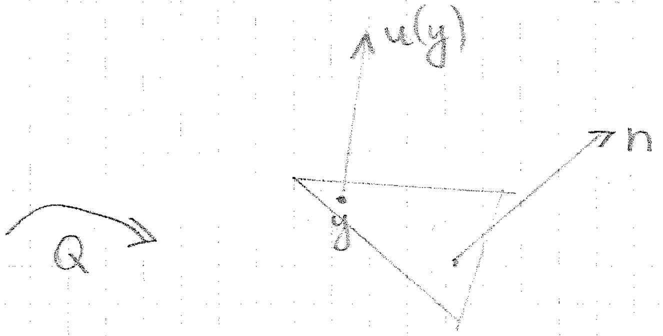
wobei $\operatorname{rot} u := \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix}$ <u>Rotation</u> des Vektorfeld $u$

Bem und Notation: $\operatorname{rot} u = \nabla \times u \underset{\text{formal}}{=} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

$$\left( \operatorname{div} u = \nabla \cdot u = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 \right)$$

<u>Beweis</u>: drehe $T$ in die $(x_1, x_2)$-Ebene




$y = Qx + c$
$Q$ orthogonal

(a) Bewegungsinvarianz der Rotation:

u ist gedrehtes Vektorfeld v

$$u(y) = Q v(x) \qquad \text{für } y = Qx + c$$

Kettenregel: $\quad Du(y)\,Q = Q\,Dv(x)$

somit $\quad Du(y) = Q\,Dv(x)\,Q^T \quad , \; Q$ orth. $(Q^T = Q^{-1})$

$\Rightarrow$

Ü (lästige Rechnung) $\qquad \underline{\operatorname{rot} u(y) = Q \operatorname{rot} v(x)}$

(b) $$\int_\Gamma \langle u(y), dy\rangle = \int_{\Gamma_0} \langle Q v(x), Q\,dx\rangle \overset{Q \text{ orth.}}{=} \int_{\Gamma_0} \langle v(x), dx\rangle$$

$$= \int_{\Gamma_0} \left( v_1(x_1,x_2,0)\,dx_1 + v_2(x_1,x_2,0)\,dx_2 + \cancel{v_3(x_1,x_2,0)\,dx_3}^{\,0} \right)$$

$$\underset{\text{Green-Riemann}}{=} \int_{T_0} \left( \partial_2 v_1(x_1,x_2,0) - \partial_1 v_2(x_1,x_2,0) \right) d(x_1,x_2)$$

$$= \int_{T_0} \langle \operatorname{rot} v(x), \underbrace{n_0}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \rangle\, dx \overset{Q \text{ orth}}{=} \int_{T_0} \langle Q \operatorname{rot} v(x), \underbrace{Q n_0}_{n} \rangle\, dx$$

Transf. $\quad y = Qx = (q_1, q_2, q_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} = \underbrace{(q_1, q_2)}_{=:\,B \,\in\, \mathbb{R}^{3\times 2}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

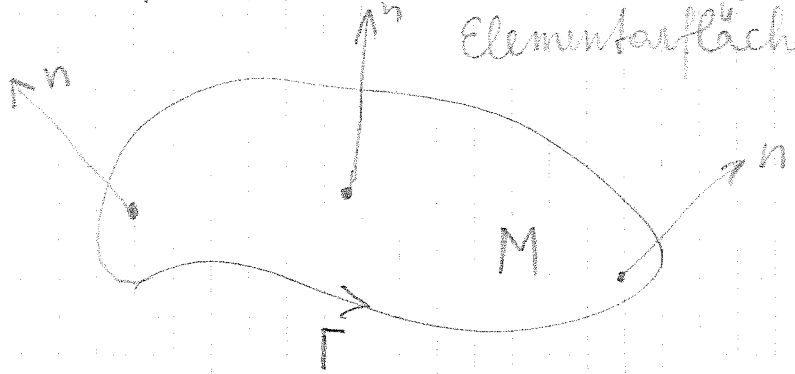
$\quad d\sigma(y) = \sqrt{\det B^T B}\,dx = dx \qquad\qquad B^T B = \begin{pmatrix} q_1^T q_1 & q_1^T q_2 \\ q_2^T q_1 & q_2^T q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$= \int_T \langle \operatorname{rot} u(y), n\rangle\, d\sigma(y) \qquad \square$$

def. Elementarfläche $E = \{ (x_1, x_2, \psi(x_1,x_2)) \mid (x_1,x_2) \in A \}$

mit $A$ 2-dim Regelgebiet, $\psi$ st. diffbar

Regelfläche $M$: kann zerlegt werden in (gedrehte) Elementarflächen




Satz: (Stokes' Integralsatz)

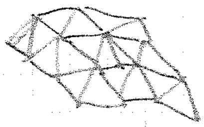
Sei $u: U \to \mathbb{R}^3$ stetig diffbares Vektorfeld ($U \subset \mathbb{R}^3$ offen)

$M \subset U$ Regelfläche mit Berandungskurve $\Gamma$

$n: M \to \mathbb{R}^3$ Normaleneinheitsvektorfeld

Orientierung von $\Gamma$ und $n$ so, dass $\dot{\gamma}(t) \times n(\gamma(t))$ außerhalb von $M$ zeigt

$$\Longrightarrow \quad \int_\Gamma \langle u, dx \rangle = \int_M \langle \operatorname{rot} u, n \rangle \, d\sigma$$

Beweis(skizze):  nähere $M$ durch facettierte Fläche aus kleinen Dreiecken mit max. Durchmesser $\delta$ an

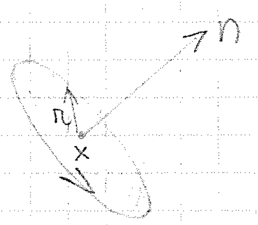
wende darauf HS an

Beiträge an inneren Kanten heben sich auf

lasse $\delta \to 0$ (Details ähnlich wie bei Beweis der Transformationsformel) $\square$

## Interpretation der Rotation rot $u(x)$

Sei $D_r(x,n)$ Kreisscheibe in $\mathbb{R}^3$ vom Radius $r$, Mp. $x$ mit Normalenvektor $n$

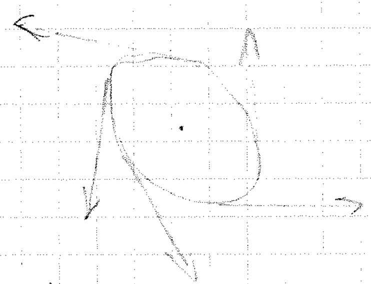



Flächeninhalt: $r^2\pi$

$$\frac{1}{r^2\pi} \int_{D_r(n,x)} \langle \operatorname{rot} u, n \rangle \, d\sigma \xrightarrow[r \to 0]{} \langle \operatorname{rot} u(x), n \rangle$$

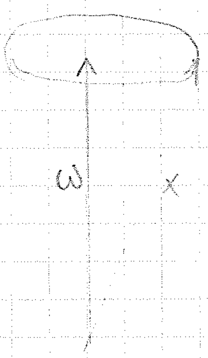
mit S.v. Stokes:

$$\langle \operatorname{rot} u(x), n \rangle = \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2\pi} \int_{\partial D_r(n,x)} \langle u, dx \rangle$$



gibt "Verwirbelung" des Vektorfeldes an

Bsp: $u(x) = \omega \times x$




Geschwindigkeit von Partikeln, die um Achse $\omega$ mit Winkelgeschw. $|\omega|$ rotieren.

$$\operatorname{rot} u(x) = 2\omega$$