Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 01.06.2021

6. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 31: Es sei $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, wobei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar sei. Berechnen Sie

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)$$

und zeigen Sie, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right)^2 .$$

Aufgabe 32: Für die differenzierbaren Funktionen $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelte

$$(*) \qquad \dot{p}_k(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_k}\left(p(t), q(t)\right) \ , \quad \dot{q}_k(t) = +\frac{\partial H}{\partial p_k}\left(p(t), q(t)\right) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $H\left(p(t), q(t)\right)$ einen konstanten Wert unabhängig von t annimmt.

Bemerkung: Die Hamilton' Gleichungen $(*)$ bestimmen die Bewegung eines mechanischen Systems mit Positionen $q(t)$ und Impulsen $p(t)$ zur Zeit t. Die Gesamtenergie $H\left(p(t), q(t)\right)$ bleibt dabei erhalten.

Aufgabe 33: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$. Zeigen Sie, dass mit $a = 0, b = 2\pi$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(b) - f(a) \neq f'(\xi)(b-a) .$$

Aufgabe 34:

(i) Zeigen Sie, dass die Matrixnorm

$$\|A\| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass sich die Matrixnorm auch folgendermaßen berechnen lässt:

$$\|A\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| = 1}} \|Ax\| .$$

(iii) Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| .$$

Aufgabe 35: Zeigen Sie für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ folgende (Un-)gleichungen:

(i) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)

(ii) $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)

(iii) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

Aufgabe 36: Betrachten Sie die Funktion $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$. Zeigen Sie, dass f die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt, also dass $f(x) \in [1,2]$ für alle $x \in [1,2]$ und, dass f eine Kontraktion ist.

Hinweis: Aus $|f'(x)| < 1$ folgt, dass f eine Kontraktion ist (warum?)

Historische Anmerkung: Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = f(x_k)$ wird auch Heron–Verfahren oder Newton–Verfahren genannt und liefert eine schnelle Approximation von $\sqrt{2}$.

Abgabe über URM bis zum 08.06.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 14.06.-16.06.2021.