Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich Tübingen, den 08.06.2021

7. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 37: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) = e^{2x-y} + 3x - 2y - 1$. Zeigen Sie, dass sich $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0)$ nach y auflösen läßt. Berechnen Sie $y'(0)$.

Aufgabe 38: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f_1(x,y) = e^x \cos y$, $f_2(x,y) = e^x \sin y$. Zeigen Sie:

i) f erfüllt in jedem Punkt die Voraussetzungen des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit.

ii) f ist nicht injektiv.

iii) Sei $U = \{(x,y) | 0 < y < 2\pi\}$; $f|_U$ ist injektiv.

iv) Bestimmen Sie $f(U)$ und die inverse Abbildung $g : f(U) \to U$.

Aufgabe 39: Sei $z(x,y)$ durch die Gleichung

$$z = x + y\varphi(z)$$

mit stetig differentierbarer Funktion φ definiert. Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung $1 - y\varphi'(z) \neq 0$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}$$

gilt.

Aufgabe 40: In der Vorlesung wurde der Satz über die lokale Umkehrbarkeit verwendet, um die Aussage des Satzes über implizite Funktionen zu beweisen. Zeigen Sie, dass man andererseits die Aussage des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweisen kann.

Aufgabe 41: (Peano 1884, Annotazione N. 103)

Zeigen Sie, dass für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die gemischten partiellen Ableitungen $\partial_x \partial_y f(0,0)$ und $\partial_y \partial_x f(0,0)$ existieren, aber

$$\partial_x \partial_y f(0,0) \neq \partial_y \partial_x f(0,0) \, .$$

Aufgabe 42: Geben Sie Bedingungen an $f : \mathbb{R}^{17} \to \mathbb{R}$ an, sodass $\partial_{13}\partial_5\partial_9\partial_7 f = \partial_7\partial_{13}\partial_9\partial_5 f$. Formulieren Sie eine Verallgemeinerung Ihres Resultats.

Abgabe über URM bis zum 15.06.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 21.06.-23.06.2021.