Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 13.07.2021

12. Übungsblatt zur Analysis II

Aufgabe 67: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Länge des Graphen von f gegeben ist durch

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \,.$$

Aufgabe 68: Sei Γ eine in Polarkoordinaten parametrisierte Kurve, d. h. $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ist von der Form

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos t \\ r(t) \sin t \end{pmatrix}$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion $r : [a, b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Länge von Γ gegeben ist durch

$$\int_a^b \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt \,.$$

Aufgabe 69: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Regelgebiet, $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar. Beweisen Sie die Greenschen Formeln:

$$\begin{aligned}
\int_A v \Delta u dx dy &= -\int_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\partial A} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \,, \\
\int_A \Delta u dx dy &= \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial n} ds \,, \\
\int_A (v \Delta u - u \Delta v) dx dy &= \int_{\partial A} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds \,,
\end{aligned}$$

wobei für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Normalenableitung und Laplace-Operator definiert sind durch

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \langle \nabla f, n \rangle \;, \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \,.$$

Aufgabe 70: Berechnen Sie

$$\int_\Gamma (x^2 y dx + x y^2 dy)$$

wobei Γ der Rand der von den Kurven $y = x^2$ und $y = 8 - x^2$ eingeschlossenen Fläche ist.

Aufgabe 71: Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u(x) = \|x\|_2^2 x$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial B_a(0)} \langle u, n \rangle d\sigma$$

wobei $B_a(0) \subset \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe $x_1^2 + x_2^2 \leq a^2$ ist.

Aufgabe 72: Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) Für beliebige Punkte $a, b \in \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma (v_1 dx_1 + v_2 dx_2)$$

unabhängig von der Wahl der Kurve Γ zwischen a und b.

(b) Es gibt eine Funktion $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, so dass $v = \nabla\phi$.

Hinweis: Man wähle

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} (v_1 dx_1 + v_2 dx_2) \ .$$

Abgabe über URM bis zum 20.07.2021, 12:00.
Besprechung in den Übungen vom 26.07.-28.07.2021.