EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Fabian Merle

Gewöhnliche Differentialgleichungen — Analysis und Numerik

Sommersemester 2021 **Tübingen, 16.06.2021**

Übungsblatt 7

Problem 1. Beweisen Sie folgende Ausagen aus der Vorlesung über Gradientensysteme

$$\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x})\,.$$

a) An regulären Punkten von V kreuzen seine Trajektorien Niveau-Hyperflächen $\{\mathbf{x} \in \mathscr{D} : V(\mathbf{x}) = c\}$ orthogonal.

b) Strikte lokale Minima von V sind asymptotisch stabile Gleichgewichtspunkte des Gradientensystems.

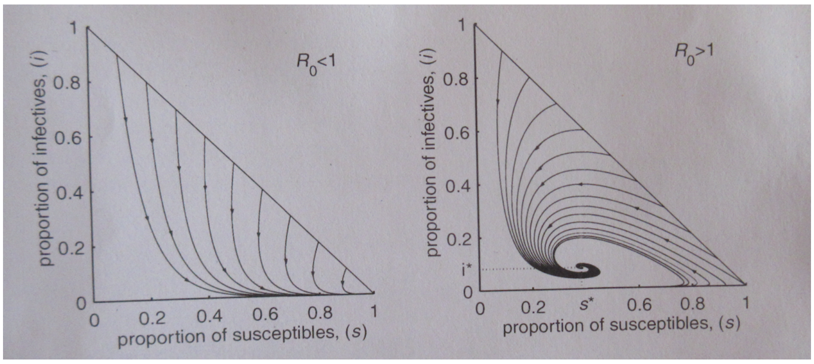

Abbildung 1: Phasenporträt des endemischen SIR-Modells; **aus:** M. Choisy, J.-F. Guegan, P. Rohani, *Mathematical modeling of infectious diseases dynamics*, pp. 379–404, Encyclopedia of Infectious Diseases; 2007 Wiley & Sons.

Problem 2. Das *endemische SIR-Modell* ist eine leichte Modifikation des SIR-Modells aus der Vorlesung: Für $\alpha, \beta, \gamma > 0$ lautet es

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \alpha - \beta I S - \alpha S\,, \\ \dot{I} &= \beta I S - \gamma I - \alpha I\,, \end{aligned}$$

mit Anfangsdaten

$$S(0) = S_0 \geq 0\,, \qquad \text{und} \qquad I(0) = I_0 \geq 0\,.$$

a) Diskutieren Sie die (eindeutige, globale) Lösbarkeit dieser AWA.

b) Untersuchen Sie seine (hyperbolischen?) Gleichgewichtspunkte auf Stabilität — in Abhängigkeit von seiner Reproduktionszahl $R = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}$. Interpretieren Sie Ihre Aussagen (anhand von Figur 1) epidemiologisch.

c) Wie lautet eine Diskretisierung mit dem *impliziten Eulerverfahren*? Ist dieses in jedem Zeitschritt lösbar?

Hinweis zu c): Verwenden Sie den Banach'schen Fixpunktsatz: wie lautet hierbei eine implementierbare Fixpunkt-Iteration in jedem Zeitschritt?

Bitte emailen Sie Ihre Bearbeitung *in pdf-Format* bis Mittwoch, den 23.06.2021, um 23.59 Uhr *mit Name und Betreff: ODE-Uebungen-2021* an: " eberspaecher@na.uni-tuebingen.de ".