

7. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen

Aufgabe 24:

Die Dirichletsche Randwertaufgabe

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

auf einem konvexen Polygonebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ werde mit einem Galerkin-Verfahren mit Ansatzräumen $V_h^{(1)} \subset V := H_0^1(\Omega)$ von linearen FE approximiert. Mit welcher Ordnung konvergieren

- (1) der „gewichtete Mittelwert“ über Ω (für eine gegebene, glatte Gewichtsfunktion $\omega \in H^1(\Omega)$):

$$\int_{\Omega} u_h \omega \, dx \rightarrow \int_{\Omega} u \omega \, dx \quad (h \rightarrow 0)?$$

- (2) der quadratische Mittelwert über einen glatten, geschlossenen Weg $\Gamma \subset \Omega$:

$$\int_{\Gamma} u_h^2 \, ds \rightarrow \int_{\Gamma} u^2 \, ds \quad (h \rightarrow 0)?$$

Hinweis: Spur-Satz.

Aufgabe 25:

Geben Sie an, ob folgende Sätze von Funktionalen für die angegebenen Polynomräume unisolvent sind. a_i seien dabei die Ecken, m_i die Seitenmitten, b_{ij} ($j = 1, 2$) zwei Gauß-Punkte auf der Kante Γ_i und z der Schwerpunkt des Elements T .

- (1) T kartesisches Einheitsdreieck:

$$P(T) = P_3(T), \quad p(a_i), \nabla p(a_i), p(z);$$

$$P(T) = P_3(T), \quad p(a_i), p(b_{ij}), p(z);$$

$$P(T) = P_5(T), \quad p(a_i), \nabla p(a_i), \nabla^2 p(a_i), \partial_n p(m_i).$$

- (2) T kartesisches Einheitsquadrat:

$$P(T) = \tilde{Q}_1(T) := P_1(T) \oplus \text{span}\{x^2 - y^2\}, \quad p(m_i);$$

$$P(T) = \tilde{Q}_3(T) := P_3(T) \oplus \text{span}\{x^3 y, xy^3\}, \quad p(a_i), \nabla p(a_i).$$

Aufgabe 26:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Polygonebiet mit einer Triangulierung $\mathcal{T}_h = \{T\}$. Betrachten Sie die beiden mit den kubischen Ansätzen aus Aufgabe 25 gebildeten Ansatzräume $S_h^{(3)}$ und $\tilde{S}_h^{(3)}$ zur Approximation der Laplace-Gleichung.

Bestimmen Sie deren Dimensionen asymptotisch in Abhängigkeit von h auf gleichmäßigen Triangulierungen. Wieviele von Null verschiedene Einträge haben die zugehörigen Steifigkeitsmatrizen pro Zeile?

Besprechung der Aufgaben in der Übungsstunde am 5. 12. 2008.