

## 2. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

### Aufgabe 4:

Wie sieht das Runge-Kutta-Verfahren aus, das zum Kollokationsverfahren mit einem Knoten  $c_1 = 1/2$  äquivalent ist?

### Aufgabe 5:

Betrachten Sie das lineare Randwertproblem

$$y' = C(t)y, \quad Ay(a) + By(b) = r.$$

Wenn Sie auf dieses Randwertproblem das Kollokationsverfahren aus Aufgabe 4 als Mehrzielmethode anwenden, so erhalten Sie ein lineares Gleichungssystem. Geben Sie dieses an.

### Aufgabe 6:

Zeigen Sie, daß für die Lösung der Mehrzielgleichungen gilt:

$$\Delta x_j = \sum_{l=0}^{m-1} G_{jl} F_l - E_j^{-1} F_m$$

mit

$$E_j := AR_0^{-1} \cdots R_{j-1}^{-1} + BR_{m-1} \cdots R_j$$

und

$$G_{jl} = \begin{cases} E_j^{-1} AR_0^{-1} \cdots R_l^{-1} & l < j, \\ -E_j^{-1} BR_{m-1} \cdots R_{l+1} & l \geq j, \end{cases}$$

wobei wir leere Produkte als  $I$  auffassen.

Bemerkung: Die Matrix  $(G_{jl})$  kann als diskretes Analogon der Green'schen Funktion aus Aufgabe 2 aufgefaßt werden.

### Programmieraufgabe 1 :

Der Flüssigkeitsstand  $y(r)$  in einer zylinderförmigen Kapillare erfüllt die Randwertaufgabe

$$y'' = \left(1 + (y')^2\right)^{3/2} (By + 2\kappa) - \frac{1}{r} \left((y')^3 + y'\right), \quad 0 < r < 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = \cot\theta$$

Hierbei ist  $\kappa$  die unbekannte Krümmung in der Zylindermitte ( $r = 0$ ),  $\theta$  ist der gegebene Kontaktwinkel am Rand ( $r = 1$ ). Die Bond-Zahl  $B$  ist ein gegebener Parameter.

Lösen Sie (wie auch immer) das Randwertproblem für  $B = 1$  und  $\theta = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ . Beachten Sie dabei  $y''(0) = \kappa$  (warum?).

**Besprechung in den Übungen am 11.11.2009**