Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 11.11.2009

3. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 7:

Gegeben sei ein 3-Punkt Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} &y' = f(y) \\ &r(y(a), y(\tau), y(b)) = 0, \qquad a < \tau < b \end{aligned}$$

$y^\star$ sei eine Lösung dieses Problems. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, daß $y^\star$ lokal eindeutig ist.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in §2 der Vorlesung vor.

Aufgabe 8:

Formulieren Sie die Mehrzielmethode für das 3-Punkt Randwertproblem aus Aufgabe 7. Wie sehen die linearen Gleichungssyteme aus, die in jedem Schritt des Newton-Verfahrens zu lösen sind?

Hinweis: Nehmen Sie an, daß τ ein Unterteilungspunkt ist.

Aufgabe 9:

Gegeben sei das parameterabhängige Randwertproblem

$$\begin{aligned} &y' = f(y, p) \\ &r(y(a), y(b); p) = 0, \qquad r \in \mathbb{R}^{d+q} \end{aligned}$$

mit $y \in \mathbb{R}^d$ und Parametern $p \in \mathbb{R}^q$. Zeigen Sie, daß die Anwendung der Mehrzielmethode auf dieses Randwertproblem in jedem Newton-Schritt auf ein Gleichungssystem mit der Matrix

$$\begin{bmatrix} R_0 & -I & & & P_0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & R_{m-1} & -I & P_{m-1} \\ A & & & B & P_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d(m+1)+q,d(m+1)+q}$$

führt, wobei $P_j = P(t_{j+1}, t_j)$, $j = 0, \dots, m-1$. Dabei ist $P_m = \frac{\partial r}{\partial p}(x_0, x_m; p)$ und $P(t, t_j)$ für $j = 0, \dots, m-1$ Lösung der verallgemeinerten Variationsgleichung zu speziellem Anfangswert:

$$\frac{dP(t,t_j)}{dt} = f_y(y(t|x_j, p); p)P(t, t_j) + f_p(y(t|x_j, p); p), \qquad P(t_j, t_j) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1$$

Aufgabe 10:

Helfen Sie Leibniz und Bernoulli: Leiten Sie (anachronistisch) die Kettenlinie durch Minimierung der potentiellen Energie her. Was genau ist zu minimieren? Wie lauten die Euler'schen Gleichungen? Weisen Sie nach, daß die in §1 der Vorlesung angegebene Lösung mit der cosh-Funktion eine Lösung der Euler'schen Gleichungen liefert.

Besprechung in den Übungen am 18.11.2009