Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 18.11.2009

4. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 11: Approximiert man im Variationsproblem

$$(\star) \qquad \int_a^b f(t,y,y')dt = \min!$$

das Integral durch die Trapezsumme und die Ableitungen durch entsprechende Differenzenquotienten, so erhält man das Minimierungsproblem

$$\frac{h}{2} f\Big(a, y(a), \frac{y(a+h)-y(a)}{h}\Big) + h \sum_{i=1}^{n-1} f\Big(t_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\Big) + \frac{h}{2} f\Big(b, y(b), \frac{y(b)-y(b-h)}{h}\Big) = \min!$$

Zeigen Sie, dass bei gegebenen Randwerten die Lösung dieses Problems genau der Anwendung der Mittelpunktsregel auf die Euler'schen Differentialgleichungen

$$y' = z, \quad w' = \frac{\partial f}{\partial y}(t,y,z), \quad 0 = w - \frac{\partial f}{\partial y'}(t,y,z)$$

entspricht.

Hinweis: Bei der Mittelpunktsregel wird die Ableitung y' durch einen Differenzenquotienten der Form

$$y'(t_i) \to \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$$

ersetzt (für w' analog).

Aufgabe 12: Zeigen Sie, dass entlang der Lösung eines Variationsproblems ($\star$) gilt, dass $f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{(\partial y')^2}$ eine positiv semidefinite Matrix ist.

Hinweis: Setzen Sie $\delta y(t) = vh(t)$ mit h wie im Fundamentallemma.

Aufgabe 13: Zeigen Sie: Ist bei einem Variationsproblem ($\star$) die Randbedingung an der Stelle b nicht vorgegeben, so muss die "natürliche" Randbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0$$

gelten, um das Problem lösbar zu machen.

Aufgabe 14: Eine Lösung des "isoperimetrischen Problems"

$$\text{Minimiere} \quad \int_a^b f(t,y(t),y'(t))dt \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \int_a^b g(t,y(t),y'(t))dt = 0!$$

mit $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n > m$ erfüllt bei festen Endpunkten $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Euler'sche Differentialgleichung

$$H_y - \frac{d}{dt} H_{y'} = 0,$$

wobei $H = f + \lambda^T g$ ist mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^m$, der durch die Nebenbedingung festgelegt ist. Wie würden Sie dieses Problem numerisch lösen? Formulieren Sie ein Randwertproblem in Standardform.

Hinweise: Nehmen Sie an, dass $H_{y'y'}$ invertierbar ist. Fassen Sie die Nebenbedingung als eine Randbedingung $v(b) = 0$ auf.

Besprechung in den Übungen am 25.11.2009