

5. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 15:

Formulieren und beweisen Sie eine 2-dimensionale Version des Fundamentallemmas der Variationsrechnung.

Aufgabe 16:

Wie lauten die Euler-Gleichungen für das Minimalflächenproblem

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y)} d(x, y) = \min!$$

bei fest vorgegebenen Randwerten $u = g$ auf $\partial\Omega$? (Hiebei sei Ω ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^2 .)

Aufgabe 17:

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet. Wie ist das finite Differenzen-Verfahren für die Poissongleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \Gamma$$

zu modifizieren, wenn Ω nicht durch Gitterlinien berandet wird? Diskutieren Sie dies anhand eines Fünf-Punkte-Sternes, durch den der Rand läuft.

Ist die Matrix des Gleichungssystems noch symmetrisch? Gilt noch das diskrete Maximumprinzip?

Programmieraufgabe 2 :

Lösen Sie näherungsweise mit dem finite Differenzen-Verfahren

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

für das Einheitsquadrat Ω , und wenn Sie wollen auch für den Einheitskreis. Nehmen Sie z.B. $h = 1/16$.

Besprechung in den Übungen am 02.12.2009.