Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 09.12.2009

7. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 22:

Man definiert: $u \in L^2(\Omega)$ hat die *schwache Ableitung* $\partial_i u$ (für $i = 1, \ldots, n$), falls $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ und

$$(\phi, \partial_i u)_0 = -(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, u)_0 \qquad \text{für alle} \;\; \phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega}) \; .$$

Zeigen Sie für beschränkte stückweise C^1-Gebiete Ω:

(a) Für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist die klassische Ableitung $\partial u / \partial x_i$ eine schwache Ableitung.

(b) Für $u \in H^1(\Omega)$ sind die verallgemeinerten Ableitungen (im Sinne der Vorlesung) schwache Ableitungen.

(c) Falls die schwachen Ableitungen von $u \in L^2(\Omega)$ existieren, so sind sie verallgemeinerte Ableitungen und daher auch $u \in H^1(\Omega)$.
Hinweis: $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ ist dicht in $L^2(\Omega)$ und daher $\|v\|_0 = \sup_{\phi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})} |(\phi, v)_0| / ||\phi||_0$.

Aufgabe 23:

Es sei eine Triangulierung eines beschränkten Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion u, die auf jedem Dreieck C^1 ist, gegeben.

Zeigen Sie:

$$u \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow u \in C(\bar{\Omega})$$

Hinweis: $u \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow u \in L^2(\Omega)$ und u besitzt schwache Ableitungen (vgl. Aufg. 22).

Aufgabe 24:

(a) Geben Sie eine stetige Funktion auf [0,1] an, die nicht in $H^1(0,1)$ enthalten ist.

(b) Sei Ω eine Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Zentrum im Ursprung. Zeigen Sie: Für $\alpha < 1/2$ ist durch $u(x) = \|x\|^{-\alpha}$ eine Funktion in $H^1(\Omega)$ gegeben.

Aufgabe 25:

Seien V, W normierte Vektorräume und $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

$$L \text{ stetig} \Longleftrightarrow L \text{ stetig in } 0 \Longleftrightarrow L \text{ beschränkt.}$$

Programmieraufgabe 3 :

Lösen Sie näherungsweise das Problem $-\Delta u = 1$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$ auf dem Dreieck

$$\Omega = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

mit der finite Elemente-Methode, z.B. von Hand mit rechtwinkligen Dreiecken der Kathetenlänge $h = 1/16$ oder durch Verwendung des Buttons "=" der Matlab PDE-Toolbox.

Besprechung in den Übungen am 16.12.2009