Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 13.01.2010

9. Übungsblatt zur Numerischen Behandlung von Differentialgleichungen I

Aufgabe 30:

(a) Zeigen Sie für lineare Interpolation in den Ecken des Referenzdreiecks $\hat{K}$

$$\|v - \hat{\Pi}v\|_0 \le C\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(\hat{K})\ .$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$v(x) - v(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} v(tx)\,dt = Dv(x)x - \int_0^1 t\frac{d^2}{dt^2} v(tx)\,dt$$

und dieselbe Formel für $\hat{\Pi}v$.

(b) Zeigen Sie mittels (a) für die lineare Interpolation in den Ecken eines beliebigen Dreiecks K mit Durchmesser h

$$\|v - \Pi v\|_0 \le C\,h^2\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(K)\ ,$$

wobei C nicht von K abhängt.

Aufgabe 31:

(a) Zeigen Sie für bilineare Interpolation in den Ecken des Einheitsquadrats $\hat{K}$

$$|v - \hat{\Pi}v|_1 \le C\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(\hat{K})\ .$$

(b) Schließen Sie daraus für den Interpolationsfehler eines aus $\hat{K}$ affin erzeugten finiten Elements K mit Durchmesser h und Inkreisradius ρ :

$$|v - \Pi v|_1 \le C\,\frac{h^2}{\rho}\,|v|_2 \qquad \text{für alle } v \in H^2(K)\ ,$$

wobei C nicht von K abhängt.

Aufgabe 32:

Das elliptische Variationsproblem $a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V$ mit $V \subset H^1(\Omega)$ werde durch ein Galerkin-Verfahren mit Approximationsraum $V_h \le V$, einer angenäherten Linearform $l_h : V_h \to \mathbb{R}$ und einer angenäherten Bilinearform $a_h : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ approximiert:

$$\text{Bestimme } u_h \in V_h \text{ mit } a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h\,.$$

Dabei seien die Bilinearformen a_h gleichgradig elliptisch, dass heisst mit einer von h unabhängigen Zahl $\alpha > 0$ gelte

$$\alpha \|w_h\|_1^2 \le a_h(w_h, w_h) \quad \forall w_h \in V_h\,.$$

Zeigen Sie für den Fehler (*Lemma von Strang*):

$$\|u - u_h\|_1 \le c \left(\inf_{v_h \in V_h} \left(\|u - v_h\|_1 + \|a(v_h,\cdot) - a_h(v_h,\cdot)\|_*\right) + \|l - l_h\|_* \right)\,,$$

wobei die Operatornorm $\|\cdot\|_*$ als $\|F\|_* = \sup_{0 \ne w_h \in V_h} \frac{|F(w_h)|}{\|w_h\|_1}$ definiert ist.
Hinweis: Fangen Sie mit der gleichgradigen Elliptizität von a_h für $w_h = u_h - v_h$ an.

Besprechung in den Übungen am 20.01.2010