Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 19.12.2011

10. Übungsblatt zur Numerik stationärer Differentialgleichungen

Aufgabe 32:

Zeigen Sie für lineare Funktionen v auf einem Dreick K mit Durchmesser h und Inkreisradius ρ

$$\|v\|_\infty \le C\,h^{-1}\,\|v\|_{0,K},$$

wobei C nicht von K abhängt, solange $h/\rho \le Const.$

Aufgabe 33:

Sei K ein Dreieck mit Durchmesser h und Inkreisradius ρ. Zeigen Sie, dass für den Interpolationsfehler gilt

$$\|u - \Pi_h u\|_\infty \le Ch|u|_{2,K} \qquad \text{für alle } u \in H^2(K)\ ,$$

wobei C nicht von K abhängt, solange $h/\rho \le Const.$

Hinweis: $H^2(K) \hookrightarrow C(K)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ist stetig und linear nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz. Zeigen Sie die Aussage zunächst für das Referenzdreick.

Aufgabe 34:

Ein H^2-reguläres Randwertproblem werde mit einer finite-Elemente Methode mit linearen finiten Elementen gelöst. Zeigen Sie, dass für den Fehler gilt

$$\|u - u_h\|_\infty \le C\,h\,|u|_2.$$

Hinweis: Verwenden Sie $u - u_h = (u - \Pi_h u) + (\Pi_h u - u_h)$, die Aufgaben 32, 33 und dann $\Pi_h u - u_h = (\Pi_h u - u) + (u - u_h)$.

Aufgabe 35:

Betrachtet werde ein elliptisches Randwertproblem in variationeller Form mit $V = H_0^1(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die finite-Elemente Methode mit linearen finiten Elementen in der H^1-Norm konvergiert (d.h. $\|u - u_h\|_1 \to 0$ für $h \to 0$), auch wenn die Lösung u nur in $H_0^1(\Omega)$ liegt.

Hinweis: Verwenden Sie Cea's Lemma und dass $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt.

Bemerkung: Die Konvergenz kann beliebig langsam sein, wenn nicht weitere Forderungen an die Regularität gestellt werden.

Besprechung in den Übungen am 09.01.2011

Wir wünschen Ihnen gesegnete Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr.