Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 28.04.2008

2. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Bioinformatiker

Aufgabe 3:

Für nicht negative ganze Zahlen n sei definiert:

$$y_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx.$$

(1) Zeigen Sie, dass $y_n + 5y_{n-1} = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.
(2) Berechnen Sie mit Hilfe von (1) $y_0, \dots, y_9$ auf zwei verschiedene Arten, indem Sie einmal von $y_0 = 0.182$ und einmal von $y_9 = 0.017$ ausgehen. Runden Sie dabei alle Zwischenergebnisse y_i auf drei Nachkommastellen, bevor Sie weiterrechnen.
(3) Vergleichen Sie die Ergebnisse und begründen Sie die Unterschiede!

Aufgabe 4:

(1) Lösen Sie durch Gaußsche Elimination (ohne Pivotierung) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 9 & -2 & 1 \\ -3/2 & 30 & -12 & 0 \\ 1 & -15 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 18 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A und berechnen Sie die Determinante $\det(A)$.
(3) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} und die Konditionszahl $\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

Aufgabe 5:

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Landau'schen Symbole in der Form $f(h) = O(h^m)$ bzw. $f(h) = o(h^m)$ für $h \in \mathbb{R}_+$, $h \to 0$, mit einem möglichst großen $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

(1) $f(h) = \dfrac{\sin(1+h) - 2\sin(1) + \sin(1-h)}{h^2} + \sin(1)$,
(2) $f(h) = \dfrac{h}{\ln(h)}$.

Aufgabe 6:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass für die zur Betragssummen- und zur Maximumsnorm gehörenden Matrizennormen gilt:

(1) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (maximale Spaltenbetragssumme)
(2) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (maximale Zeilenbetragssumme)
(3) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m} \|A\|_\infty$

Programmieraufgabe 3 :

Schreiben Sie ein Programm für die Lösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$.

Berechnen Sie dazu in einem Unterprogramm zunächst eine LR-Zerlegung der Koeffizientenmatrix A mittels Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotsuche. Zur Lösung des Gleichungssystems verwenden Sie die berechnete LR-Zerlegung.

Verwenden sie Ihr geschriebenes Unterprogramm, um

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3.5 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 1 & 2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3.5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 6 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und die Gleichungssystemen $H_{12}x = b$ und $\tilde{H}_{12}x = b$ zu lösen.
Dabei ist H_{12} die (12×12)-Hilbertmatrix (Befehl `hilb (n)`). Die Matrix $\tilde{H}_{12}$ ergibt sich aus H_{12} durch Ersetzung der Hauptdiagonalelemente mit 1.0.
Bestimmen Sie jeweils die rechte Seite b so, dass $(1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^{12}$ die exakte Lösung des Gleichungssystems ist.

Programmieraufgabe 4 :

Schreiben Sie ein Programm, das die Bildmenge des Einheitskreises S unter der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix}$$

berechnet und plotten Sie das Ergebnis. Erzeugen Sie dazu den Einheitskreis $S = \{ (\sin(t), \cos(t)) \mid t \in [0, 2\pi] \}$ mit $t \in \{ \frac{\pi}{180}, \frac{2\pi}{180}, \ldots, \frac{360\pi}{180} \}$

Berechnen Sie die Determinante von A und interpretieren Sie damit das Ergebnis. Was passiert bei kleinen Änderungen (Größenordnung 10^{-2}) in der Matrix A?

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 19.05.2008.