Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Daniel Weiß

Tübingen, den 6. 5. 2009

3. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

Aufgabe 7 (Fehlerverstärkung):

Untersuchen Sie den relativen Fehler

$$\frac{\varphi_i(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi_i(x, y)}{\varphi_i(x, y)}$$

der Operationen

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= x + y \\ \varphi_2(x, y) &= x \cdot y \end{aligned}$$

mit den gestörten Eingabedaten

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x(1 + \varepsilon_x) \\ \bar{y} &= y(1 + \varepsilon_y). \end{aligned}$$

Wie werden die Eingabefehler ε_x und ε_y verstärkt? Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem in Aufgabe 5 beschriebenen Phänomen der Auslöschung.

Aufgabe 8 (zugehörige Matrixnorm):

Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| := \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|}$$

eine Norm auf dem Raum der reellen $(m \times n)$-Matrizen definiert ist.

Aufgabe 9:

Zu lösen sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \bar{R} & \bar{v} \\ \hline \bar{u}^T & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

wobei $\bar{R} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist, $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$.

Geben Sie die Dreieckszerlegung von A an und zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn

$$\bar{u}^T \bar{R}^{-1} \bar{v} \neq 0$$

gilt. Formulieren Sie einen sparsamen Algorithmus zur Berechnung von x in Pseudo-Code. Wieviele und welche Operationen sind nötig?

Besprechung und Abgabe der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.