Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Daniel Weiß

Tübingen, den 20. 5. 2009

5. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Informatiker und Bioinformatiker

Aufgabe 13 (Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl: Spezialfälle):

(1) Zeigen Sie, dass die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotwahl einer oberen Hessenberg-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

die Hessenberg-Struktur in den Restmatrizen erhält.

(2) Zeigen Sie: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

tritt bei Durchführung der Gauß-Elimination Gleichheit in der Abschätzung

$$\rho_n(A) = \frac{\alpha_{max}}{\max\limits_{i,j} |a_{ij}|} \leq 2^{n-1}$$

auf.

(3) Zeigen Sie: $\rho_n(A) \leq n$, falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Hessenberg-Matrix ist. Fakultativ: wie lässt sich die Matrix A aus Teilaufgabe (2) modifizieren, so dass Gleichheit $\rho_n(A) = n$ gilt?

Aufgabe 14:

Seien A und T $(n \times n)$-Matrizen und T invertierbar. Geben Sie einen Algorithmus an, der $T^{-1}AT$ in $\frac{7}{3}n^3 + O(n^2)$ Operationen berechnet.

Berechnen Sie mit diesem Algorithmus $T^{-1}AT$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 19 \\ 0 & -12 & 50 \\ 9 & -18 & 45 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 15:

Berechnen Sie die Kondition der Auswertung eines durch die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ gegebenen Polynoms

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

an der Stelle x zum einen bezüglich Störungen $a_i \to \widetilde{a}_i = a_i(1+\varepsilon_i)$ der Koeffizienten und zum anderen bezüglich Störungen $x \to \widetilde{x} = x(1+\varepsilon)$ von x. Betrachten Sie insbesondere das Polynom

$$p(x) = 8118x^4 - 11482x^3 + x^2 + 5741x - 2030$$

an der Stelle $x = 0.707107$. Das „exakte" Resultat ist

$$p(x) = 1.9152732527082 \cdot 10^{-11}.$$

Ein Rechner liefere

$$\widehat{p}(x) = 1.9781509763561 \cdot 10^{-11}.$$

Beurteilen Sie die Lösung anhand der Kondition des Problems.

Besprechung und Abgabe der Aufgaben in der nächsten Übungsstunde.