Multi-parameter regularization arising in optimal control of fluid flows

Markus Klein

Fachbereich Mathematik
Eberhard Karls Universität Tübingen

Disputation
Tübingen, 2015-01-26

Überblick

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y, u)$ u.d.N. $\text{PDE}(y) \;=\; u$, $[y \in C_Y,\; u \in C_U]$.

Überblick

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y, u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) \;=\; u$, $[y \in C_Y,\; u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Baňas, K., Prohl, '14]

Überblick

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y,u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) \;=\; u$, $[y \in C_Y,\ u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Bañas, K., Prohl, '14]

Opt-TF

Min. $\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2$
u.d.N. **Thin-Film Gleichung**
& $y \geq C_0$ f.ü.

[K., Prohl, '14]

Überblick

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y,u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) \;=\; u,\ [y \in C_Y,\ u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Baňas, K., Prohl, '14]

Opt-TF

Min. $\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2$
u.d.N. **Thin-Film Gleichung**
& $y \geq C_0$ f.ü.

[K., Prohl, '14]

Fragen:

Existenz & Optimalitätsbedingungen

Numerische Studien und Experimente

Konvergenz für Diskretisierungsparameter$\rightarrow 0$

Überblick

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y,u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) = u$, $[y \in C_Y,\ u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Baňas, K., Prohl, '14]

Opt-TF

Min. $\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2$
u.d.N. **Thin-Film Gleichung**
& $y \geq C_0$ f.ü.

[K., Prohl, '14]

Fragen:

Existenz & Optimalitätsbedingungen

Numerische Studien und Experimente

Konvergenz für Diskretisierungsparameter$\to 0$

Das Modell Opt-NSE

$\rho_0 = \rho_1 \chi_{\Omega_1} + \rho_2 \chi_{\Omega_2}$ zwei unvermischbare viskose inkompressible Flüssigkeiten in beschränktem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Dichte Geschwindigkeit Druck externe Kraft

$$(NSE) \begin{cases} \rho \boldsymbol{y}_t + \rho[\boldsymbol{y} \cdot \nabla]\boldsymbol{y} - \mu \Delta \boldsymbol{y} + \nabla p = \rho \boldsymbol{u}, & \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \\ \rho_t + [\boldsymbol{y} \cdot \nabla]\rho = 0, & \rho(0) = \rho_0, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{y} = 0 & + R.B. \end{cases}$$

Das Modell Opt-NSE

$\rho_0 = \rho_1 \chi_{\Omega_1} + \rho_2 \chi_{\Omega_2}$ zwei unvermischbare viskose inkompressible Flüssigkeiten in beschränktem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Minimiere

"Form" "Geometrie" "Kosten"

$$J(\rho, \boldsymbol{u}) = \boxed{\tfrac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)}} + \boxed{\tfrac{\beta}{2}\int_0^T \mathcal{H}^1(S_\rho)\,\mathrm{d}t} + \boxed{\tfrac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega_T)}}$$

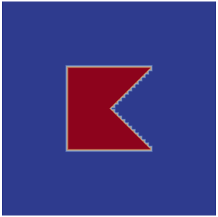
unter der Nebenbedingung

Dichte Geschwindigkeit Druck externe Kraft

$$(NSE)\begin{cases} \rho \boldsymbol{y}_t + \rho[\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\boldsymbol{y} - \mu\Delta\boldsymbol{y} + \nabla p = \rho\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \\ \rho_t + [\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\rho = 0, & \rho(0) = \rho_0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{y} = 0 & + R.B. \end{cases}$$

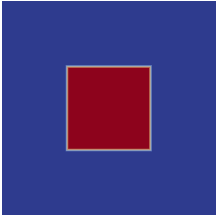
Bedeutung des geometrischen Funktionals

$\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$



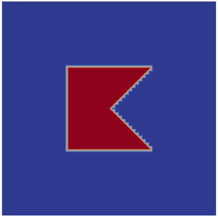
$t = 0$

Ziel $\hat{\rho}$



$\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$

$+ \int_0^T \mathcal{H}^1(S_\rho)$



$t = 0$

Fluid 1 Fluid 2

(Simulation von Ľ. Baňas)

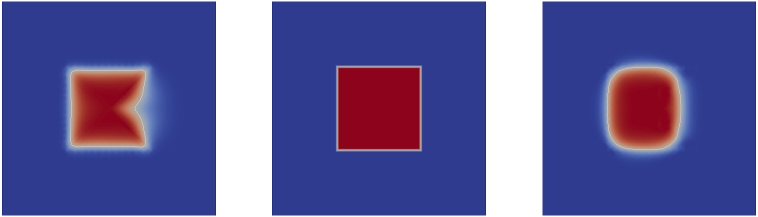
Bedeutung des geometrischen Funktionals

$\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$

Ziel $\hat{\rho}$

$\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$

$+ \int_0^T \mathcal{H}^1(S_\rho)$



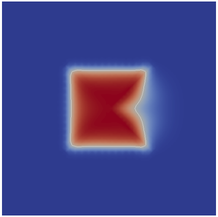
$t = T$ $\qquad$ $t = T$

Fluid 1 Fluid 2

(Simulation von Ľ. Baňas)

Bedeutung des geometrischen Funktionals

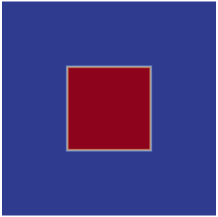
$\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$



$t = T$

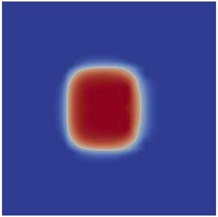
bessere Ecken

Ziel $\hat{\rho}$



$\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$

$+ \int_0^T \mathcal{H}^1(S_\rho)$



$t = T$

Korrekte Geometrie

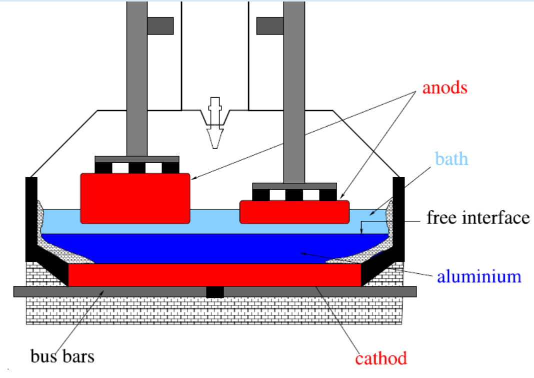
(konvex)

Fluid 1 Fluid 2

(Simulation von Ľ. Baňas)

Industrielle Anwendung

Aluminium-Herstellung



Anode darf Interface nicht berühren!

[Gerbeau, Le Bris, Lelièvre '06]

Analytische Probleme und Strategie

Minimiere

$$J(\rho, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\beta}{2}\int_0^T \mathcal{H}^1(S_\rho)\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$$

unter der Nebenbedingung

$$(NSE) \begin{cases} \rho \boldsymbol{y}_t + \rho[\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\boldsymbol{y} - \mu\Delta\boldsymbol{y} + \nabla p = \rho\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \\ \rho_t + [\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\rho = 0, & \rho(0) = \rho_0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{y} = 0 & + R.B. \end{cases}$$

- **Problem:** Nicht klar, ob roter Term ("Geometrie") wohldefiniert bzw. schwach unterhalbstetig und ob Lagrange-Multiplikator zur Massengleichung existiert und eine Funktion ist.

Analytische Probleme und Strategie

Minimiere

$$J(\rho, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\beta}{2}\int_0^T \mathcal{H}^1(S_\rho)\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$$

unter der Nebenbedingung

$$(NSE) \begin{cases} \rho \boldsymbol{y}_t + \rho[\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\boldsymbol{y} - \mu\Delta\boldsymbol{y} + \nabla p = \rho\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \\ \rho_t + [\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\rho = 0, & \rho(0) = \rho_0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{y} = 0 & + R.B. \end{cases}$$

- **Problem:** Nicht klar, ob roter Term ("Geometrie") wohldefiniert bzw. schwach unterhalbstetig und ob Lagrange-Multiplikator zur Massengleichung existiert und eine Funktion ist.
- **Lösung:** Approximiere Hausdorff-Maß und addiere künstliche Diffusion zur Gleichung.

Analytische Probleme und Strategie

Minimiere

$$J_{\delta}(\rho, \boldsymbol{u}) = \quad + \frac{\beta}{2}\left(\delta \int_{\Omega_T} |\nabla \rho|^2 + \frac{1}{\delta}\int_{\Omega_T} W(\rho)\right) + $$

$W \geq 0; \quad W = 0 \iff \rho = \rho_1$ oder $\rho = \rho_2$

unter der Nebenbedingung

$$(NSE_{\varepsilon}) \begin{cases} \rho \boldsymbol{y}_t + \rho[\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\boldsymbol{y} - \mu\Delta\boldsymbol{y} + \nabla p = \rho\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \\ \rho_t + [\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\rho - \varepsilon\Delta\rho = 0, & \rho(0) = \rho_0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{y} = 0 & + R.B. \end{cases}$$

- **Lösung:** Approximiere Hausdorff-Maß und addiere künstliche Diffusion zur Gleichung.

Analytische Resultate

$$J_\delta(\rho, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\beta}{2}\left(\delta \int_{\Omega_T} |\nabla \rho|^2 + \frac{1}{\delta}\int_{\Omega_T} W(\rho)\right) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$$

Existenz

Für $\delta, \varepsilon > 0$ existiert mindestens ein Minimum.

Analytische Resultate

$$J_\delta(\rho, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\beta}{2}\left(\delta \int_{\Omega_T} |\nabla\rho|^2 + \frac{1}{\delta}\int_{\Omega_T} W(\rho)\right) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$$

Existenz

Für $\delta, \varepsilon > 0$ existiert mindestens ein Minimum.

Optimalitätsbedingungen

Für $\delta, \varepsilon > 0$ existieren Lagrange-Multiplikatoren (Funktionen in $L^2(\Omega_T)$).

Analytische Resultate

$$J_\delta(\rho, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\beta}{2}\left(\delta \int_{\Omega_T} |\nabla\rho|^2 + \frac{1}{\delta}\int_{\Omega_T} W(\rho)\right) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$$

Existenz

Für $\delta, \varepsilon > 0$ existiert mindestens ein Minimum.

Optimalitätsbedingungen

Für $\delta, \varepsilon > 0$ existieren Lagrange-Multiplikatoren (Funktionen in $L^2(\Omega_T)$).

Beweis

Wesentliche Bestandteile:

- Lagrange-Multiplikatoren Theorem,
- a-priori Abschätzungen ($\varepsilon > 0$!).

Analytische Resultate

$$J_\delta(\rho, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\beta}{2}\left(\delta \int_{\Omega_T} |\nabla\rho|^2 + \frac{1}{\delta}\int_{\Omega_T} W(\rho)\right) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2(\Omega_T)}$$

Existenz

Für $\delta, \varepsilon > 0$ existiert mindestens ein Minimum.

Optimalitätsbedingungen

Für $\delta, \varepsilon > 0$ existieren Lagrange-Multiplikatoren (Funktionen in $L^2(\Omega_T)$).

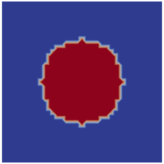
Konvergenz zum Limes?

Notwendige Bedingung ist

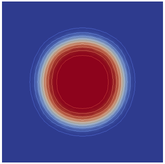
$$\delta = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Fall $\varepsilon \gg \delta$: Massive Diffusion

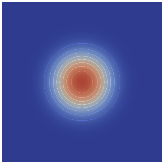
Minimiere $\boxed{\delta \int_{\Omega_T} |\nabla \rho|^2 + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_T} W(\rho)}$ u.d.N. (NSE_ε).



$\rho(t = 0)$



$\rho(t = 0.5)$
moderatores ε



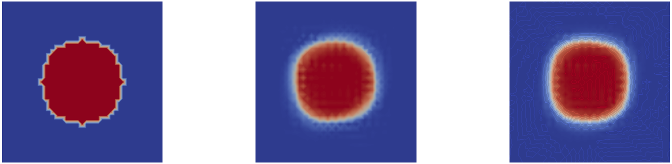
$\rho(t = 0.5)$
großes ε

Fluid 1 Fluid 2

(Simulation von Ľ. Baňas)

Fall $\varepsilon \ll \delta$: parasitic currents

Minimiere $\boxed{\delta \int_{\Omega_T} |\nabla \rho|^2 + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_T} W(\rho)}$ u.d.N. (NSE_ε).



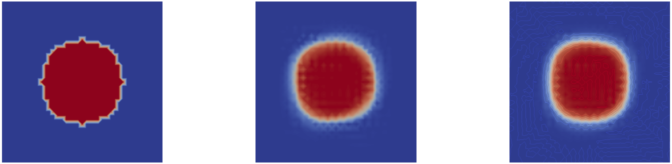
$\rho(t = 0)$ $\rho(t = 0.25)$ $\rho(t = 0.5)$

Fluid 1 Fluid 2

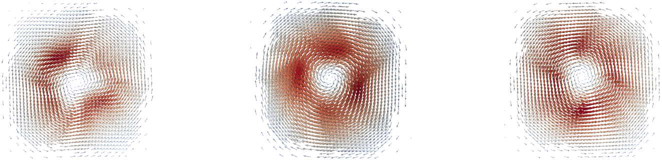
(Simulation von Ľ. Baňas)

Fall $\varepsilon \ll \delta$: parasitic currents

Minimiere $\boxed{\delta \int_{\Omega_T} |\nabla\rho|^2 + \frac{1}{\delta} \int_{\Omega_T} W(\rho)}$ u.d.N. (NSE_ε).



$\rho(t=0)$ $\rho(t=0.25)$ $\rho(t=0.5)$



$\boldsymbol{y}(t=0.05)$ $\boldsymbol{y}(t=0.15)$ $\boldsymbol{y}(t=0.35)$

Fluid 1 Fluid 2

(Simulation von Ľ. Baňas)

Überblick

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y,u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) \;=\; u,\ [y \in C_Y,\ u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Baňas, K., Prohl, '14]

Opt-TF

Min. $\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2$
u.d.N. **Thin-Film Gleichung**
& $y \geq C_0$.

[K., Prohl, '14]

- ✘ offen — Existenz & Opt.-Bed. (**ohne** Regularisierung)
- ✔ Ja! — Existenz & Opt.-Bed. (**mit** Regularisierung)
- ✘ offen — Konvergenz für **Regularisierungs**parameter$\to 0$
- ✔ Ja! — Numerische Studien und Experimente
- Konvergenz für **Diskretisierungs**parameter$\to 0$

Numerische Diskretisierung

Strategie

- Fixiere $\delta, \varepsilon > 0$.
- Benutze "first discretize, then optimize" Ansatz mit konvergentem und unbedingt stabilem Schema aus [Baňas, Prohl '10].
- Zeige Existenz eines diskreten Minimums, leite diskrete Optimalitätsbedingungen her.

Numerische Diskretisierung

Strategie

- Fixiere $\delta, \varepsilon > 0$.
- Benutze "first discretize, then optimize" Ansatz mit konvergentem und unbedingt stabilem Schema aus [Baňas, Prohl '10].
- Zeige Existenz eines diskreten Minimums, leite diskrete Optimalitätsbedingungen her.
- **Zeige uniforme Schranken, um schwache Grenzwerte zu erhalten** und identifiziere diese mit (kontinuierlichen) Opt.-Bed.

Numerische Diskretisierung

Strategie

- Fixiere $\delta, \varepsilon > 0$.
- Benutze "first discretize, then optimize" Ansatz mit konvergentem und unbedingt stabilem Schema aus [Baňas, Prohl '10].
- Zeige Existenz eines diskreten Minimums, leite diskrete Optimalitätsbedingungen her.
- Zeige uniforme Schranken, um schwache Grenzwerte zu erhalten und identifiziere diese mit (kontinuierlichen) Opt.-Bed.
- Starke Kopplung zwischen Zuständen und Adjungierten und starke Kopplung zwischen beiden Adjungierten in der Adjungierten Gleichung.

Probleme mit der Adjungiertengleichung

(Kontinuierliche) Adjungiertengleichung:

z.B. $1/2\eta\nabla\rho$

$$\mathbf{0} = -\rho \boldsymbol{z}_t - \nabla q - \mu\Delta\boldsymbol{z} - 1/2\rho\nabla\eta + \text{Kopplung mit Zuständen}$$

$$0 = J_\rho(\rho, \boldsymbol{u}) - \eta_t - \varepsilon\Delta\eta - 1/2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}_t + \text{Kopplung mit Zuständen}$$

z.B. $1/2[\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$

Probleme mit der Adjungiertengleichung

(Kontinuierliche) Adjungiertengleichung:

z.B. $1/2\eta\nabla\rho$

$$\mathbf{0} = -\rho \boldsymbol{z}_t - \nabla q - \mu\Delta \boldsymbol{z} - 1/2\rho\nabla\eta + \text{Kopplung mit Zuständen}$$

$$0 = J_\rho(\rho, \boldsymbol{u}) - \eta_t - \varepsilon\Delta\eta - 1/2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}_t + \text{Kopplung mit Zuständen}$$

z.B. $1/2[\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$

Probleme:

- Teste erste Zeile mit $\boldsymbol{z}$ $\Rightarrow$ Problem mit roten Termen

Probleme mit der Adjungiertengleichung

(Kontinuierliche) Adjungiertengleichung:

z.B. $1/2\eta\nabla\rho$

$$\mathbf{0} = -\rho \boldsymbol{z}_t - \nabla q - \mu\Delta\boldsymbol{z} - 1/2\rho\nabla\eta + \text{Kopplung mit Zuständen}$$

$$0 = J_\rho(\rho, \boldsymbol{u}) - \eta_t - \varepsilon\Delta\eta - 1/2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}_t + \text{Kopplung mit Zuständen}$$

z.B. $1/2[\boldsymbol{y}\cdot\nabla]\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$

Probleme:

- Teste erste Zeile mit $\boldsymbol{z}$ $\Rightarrow$ Problem mit roten Termen
- Teste zweite Zeile mit η $\Rightarrow$ Problem mit roten Termen

Numerische Diskretisierung

Strategie

- Fixiere $\delta, \varepsilon > 0$.
- Benutze "first discretize, then optimize" Ansatz mit konvergentem und unbedingt stabilem Schema aus [Baňas, Prohl '10].
- Zeige Existenz eines diskreten Minimums, leite diskrete Optimalitätsbedingungen her.
- Zeige uniforme Schranken, um schwache Grenzwerte zu erhalten und identifiziere diese mit (kontinuierlichen) Opt.-Bed.
- Starke Kopplung zwischen Zuständen und Adjungierten und starke Kopplung zwischen beiden Adjungierten in der Adjungierten Gleichung.

Numerische Diskretisierung

Strategie

- Fixiere $\delta, \varepsilon > 0$.
- Benutze "first discretize, then optimize" Ansatz mit konvergentem und unbedingt stabilem Schema aus [Baňas, Prohl '10].
- Zeige Existenz eines diskreten Minimums, leite diskrete Optimalitätsbedingungen her.
- Zeige uniforme Schranken, um schwache Grenzwerte zu erhalten und identifiziere diese mit (kontinuierlichen) Opt.-Bed.
- Starke Kopplung zwischen Zuständen und Adjungierten und starke Kopplung zwischen beiden Adjungierten in der Adjungierten Gleichung.
- $\Rightarrow$ Starke Normen der Zustände müssen beschränkt werden.

Numerische Diskretisierung

Strategie

- Fixiere $\delta, \varepsilon > 0$.
- Benutze "first discretize, then optimize" Ansatz mit konvergentem und unbedingt stabilem Schema aus [Baňas, Prohl '10].
- Zeige Existenz eines diskreten Minimums, leite diskrete Optimalitätsbedingungen her.
- Zeige uniforme Schranken, um schwache Grenzwerte zu erhalten und identifiziere diese mit (kontinuierlichen) Opt.-Bed.
- Starke Kopplung zwischen Zuständen und Adjungierten und starke Kopplung zwischen beiden Adjungierten in der Adjungierten Gleichung.
- $\Rightarrow$ Starke Normen der Zustände müssen beschränkt werden.
- $\Rightarrow$ Regularität für beide Adjungierten muss simultan gezeigt werden.

Konvergenzresultat

Stabilität

1. Die diskreten Zustände, Adjungierten und Kontrollen sind uniform (bzgl. $h, k > 0$) in geeigneten Normen beschränkt.
2. Diese Folgen konvergieren schwach für $h, k \to 0$ gegen Grenzfunktionen (bis auf Teilfolgen) in diesen Normen.

Konvergenzresultat

Stabilität

1. Die diskreten Zustände, Adjungierten und Kontrollen sind uniform (bzgl. $h, k > 0$) in geeigneten Normen beschränkt.
2. Diese Folgen konvergieren schwach für $h, k \to 0$ gegen Grenzfunktionen (bis auf Teilfolgen) in diesen Normen.

Konvergenz des Optimalitätssystems

Die Grenzfunktionen lösen die kontinuierlichen Optimalitätsbedingungen.

Überblick

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y, u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) \;=\; u$, $[y \in C_Y,\ u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Baňas, K., Prohl, '14]

Opt-TF

Min. $\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2$
u.d.N. **Thin-Film Gleichung**
& $y \geq C_0$ f.ü.

[K., Prohl, '14]

- ✘ offen — Existenz & Opt.-Bed. (**ohne** Regularisierung)
- ✔ Ja! — Existenz & Opt.-Bed. (**mit** Regularisierung)
- ✘ offen — Konvergenz für **Regularisierungs**parameter $\to 0$
- ✔ Ja! — Numerische Studien und Experimente
- ✔ Ja! — Konvergenz für **Diskretisierungs**parameter $\to 0$

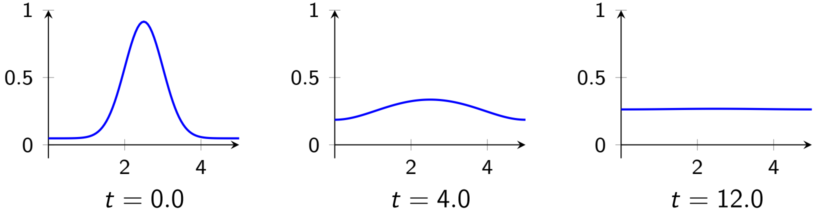
Das Modell Opt-TF

$\Omega \subset \mathbb{R}$ beschränkt, $1 \leq \kappa \leq 4$, $0 < y_0$ f.ü.

Filmhöhe — externe Kraft

$$(TF) \qquad y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x, \qquad y(0) = y_0 \qquad + R.B.$$

Beispiel für $u \equiv 0$



Das Modell Opt-TF

$\Omega \subset \mathbb{R}$ beschränkt, $1 \leq \kappa \leq 4$, $0 < y_0$ f.ü.
Minimiere $J : L^2(\Omega_T) \times L^2(H_0^1) \to \mathbb{R}$, definiert durch

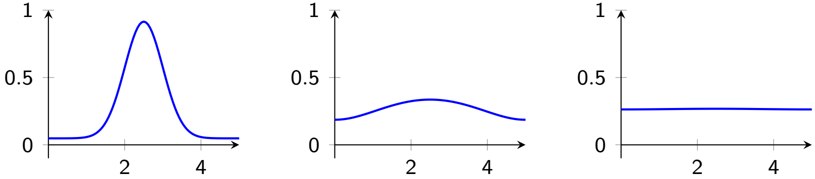
$$J(y,u) = \boxed{\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2_{L^2(\Omega_T)}} + \boxed{\frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega_T)}}$$

unter der Nebenbedingung

Filmhöhe externe Kraft

$$(TF) \qquad y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x, \qquad y(0) = y_0 \qquad + R.B.$$

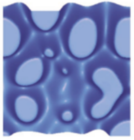
Beispiel für $u \equiv 0$



$t = 0.0$ $\qquad$ $t = 4.0$ $\qquad$ $t = 12.0$

Industrielle Anwendung

Dewetting von Wafern

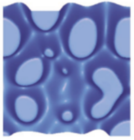


Bestimmte Regionen sollen nicht benetzt sein!

[Becker, Grün et al '02]

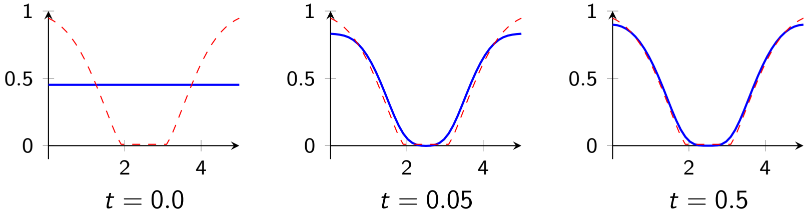
Industrielle Anwendung

Dewetting von Wafern



Bestimmte Regionen sollen nicht benetzt sein!

[Becker, Grün et al '02]



Degeneriertheit und Lösungsansätze

Min. $\quad J(y,u) = \frac{1}{2}\|y-\hat{y}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega_T)}$

u.d.N. $\quad y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$

Problem

Gleichung kann für $y = 0$ degenerieren (nicht wohlgestellt!).

Degeneriertheit und Lösungsansätze

Min. $\quad J(y,u) = \frac{1}{2}\|y-\hat{y}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega_T)}$

u.d.N. $\quad y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$

Problem

Gleichung kann für $y = 0$ degenerieren (nicht wohlgestellt!).

Kontrollschranken

Berechne hinreichende Bedingung für u, so dass $y(u) \geq C_0 > 0$ f.ü. Füge diese als **Kontrollschranken** $u \in C_U$ ins Optimierungsproblem.

Zustandsschranken

Fordere explizit **Zustandsschranken** $y \geq C_0 > 0$ f.ü. im Optimierungsproblem.

Degeneriertheit und Lösungsansätze

$$\text{Min.} \quad J(y,u) = \frac{1}{2}\|y-\hat{y}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega_T)}$$

$$\text{u.d.N.} \quad y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x \qquad \& \ y \geq C_0 > 0 \text{ f.ü.}$$

Problem

Gleichung kann für $y = 0$ degenerieren (nicht wohlgestellt!).

Kontrollschranken

Berechne hinreichende Bedingung für u, so dass $y(u) \geq C_0 > 0$ f.ü. Füge diese als **Kontrollschranken** $u \in C_U$ ins Optimierungsproblem.

Zustandsschranken

Fordere explizit **Zustandsschranken** $y \geq C_0 > 0$ f.ü. im Optimierungsproblem.

Menge C_U kann zu klein sein. Bevorzuge Zustandsschranken [Clason, Kaltenbacher '13].

Analytische Resultate

Min. $\quad J(y,u) = \frac{1}{2}\|y-\hat{y}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega_T)}$

u.d.N. $\quad y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x \qquad \& \ y \geq C_0 > 0$ f.ü.

Nichtleere zulässige Menge

Sei $\kappa \geq 4$. Für $u \equiv 0$ erfüllt zugehörige Lösung $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

[Bernis, Friedman '90]

Analytische Resultate

$$\text{Min.} \qquad J(y,u) = \frac{1}{2}\|y-\hat{y}\|^2_{L^2(\Omega_T)} + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega_T)}$$

$$\text{u.d.N.} \qquad y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x \qquad \& \; y \geq C_0 > 0 \text{ f.ü.}$$

Nichtleere zulässige Menge

Sei $\kappa \geq 4$. Für $u \equiv 0$ erfüllt zugehörige Lösung $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

[Bernis, Friedman '90]

Existenz Minimum

Es existiert mindestens ein Minimum.

(Notwendige) Optimalitätsbedingungen

Optimalitätsbedingungen

Es gibt $z \in L^2(L^2)$ und $\mu \in (L^2(H^4) \cap H^1(L^2))^*$ so, dass für alle $\varphi \in L^2(H^4) \cap H^1(L^2)$ und alle $C_0 \geq w \in L^2(H^4) \cap H^1(L^2)$

$$
\begin{aligned}
y_t &= -\left(|y|^\kappa y_{xxx}\right)_x + u_x, \\
y &\geq C_0, \\
0 &\geq \langle w - y, \mu \rangle, \\
0 &= \langle y - \tilde{y}, \varphi \rangle + \left\langle z, \varphi_t + \kappa(|y|^{\kappa-1} y_{xxx} \varphi)_x \right\rangle + \left\langle z, \left(|y|^\kappa \varphi_{xxx}\right)_x \right\rangle + \langle \varphi, \mu \rangle, \\
0 &= -\alpha u_{xx} + z_x.
\end{aligned}
$$

Beweis

Wesentliche Bestandteile:

- Abstraktes "Lagrange-Multiplikatoren" Theorem [Alibert, Raymond '98],
- Neue a-priori Abschätzungen für Gleichung.

Regularisierung von Opt-TF

Original Problem

Min. $J(y,u)$ u.d.N. $y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$ & $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

$\downarrow$

Penalty Approximation

Min. $J(y,u) + \frac{1}{2\gamma}\|(C_0 - y)^+\|^2_{L^2(\Omega_T)}$ u.d.N. $y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$

Regularisierung von Opt-TF

Original Problem

Min. $J(y,u)$ u.d.N. $y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$ & $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

Nicht wohlgestellt!

Penalty Approximation

Min. $J(y,u) + \frac{1}{2\gamma}\|(C_0 - y)^+\|^2_{L^2(\Omega_T)}$ u.d.N. $y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$

Regularisierung von Opt-TF

Original Problem

Min. $J(y,u)$ u.d.N. $y_t + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$ & $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

$\downarrow$ **Nächste Folie!**

Hilfsproblem

Min. $J(y,u)$ u.d.N. $y_t + \varepsilon y_{xxxx} + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$ & $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

$\downarrow$ **Standard (Konvergenz für $\gamma \to 0$)**

Penalty Approximation

Min. $J(y,u) + \frac{1}{2\gamma}\|(C_0 - y)^+\|^2_{L^2(\Omega_T)}$ u.d.N. $y_t + \varepsilon y_{xxxx} + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$

Konvergenz für das Hilfsproblem

Hilfsproblem

Min. $J(y, u)$ u.d.N. $y_t + \varepsilon y_{xxxx} + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$ & $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

Existenz und Optimalitätsbedingungen

Es existiert mind. eine Lösung des Hilfsproblems, und diese erfüllt (inkl. Lagrange-Multiplikatoren) entsprechende Optimalitätsbedingungen.

Konvergenz für das Hilfsproblem

Hilfsproblem

Min. $J(y, u)$ u.d.N. $y_t + \varepsilon y_{xxxx} + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$ & $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

Existenz und Optimalitätsbedingungen

Es existiert mind. eine Lösung des Hilfsproblems, und diese erfüllt (inkl. Lagrange-Multiplikatoren) entsprechende Optimalitätsbedingungen.

Stabilität

Die Folge $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, z_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ konvergiert gegen schwache Grenzwerte in geeigneten Normen (bis auf Teilfolgen) für $\varepsilon \to 0$.

Konvergenz für das Hilfsproblem

Hilfsproblem

Min. $J(y,u)$ u.d.N. $y_t + \varepsilon y_{xxxx} + (|y|^\kappa y_{xxx})_x = u_x$ & $y \geq C_0 > 0$ f.ü.

Existenz und Optimalitätsbedingungen

Es existiert mind. eine Lösung des Hilfsproblems, und diese erfüllt (inkl. Lagrange-Multiplikatoren) entsprechende Optimalitätsbedingungen.

Stabilität

Die Folge $(y_\varepsilon, u_\varepsilon, z_\varepsilon, \mu_\varepsilon)$ konvergiert gegen schwache Grenzwerte in geeigneten Normen (bis auf Teilfolgen) für $\varepsilon \to 0$.

Konvergenz des Optimalitätssystems

Diese Grenzfunktionen lösen die Optimalitätsbedingungen des originalen Problems.

Zusammenfassung

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y,u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) \; = \; u$, $[y \in C_Y,\ u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Baňas, K., Prohl, '14]

Opt-TF

Min. $\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2$
u.d.N. **Thin-Film Gleichung**
& $y \geq C_0$ f.ü.

[K., Prohl, '14]

Opt-NSE			Opt-TF	
✘	offen	Existenz & Opt.-Bed. (**ohne** Regularisierung)	✔	Ja!
✔	Ja!	Existenz & Opt.-Bed. (**mit** Regularisierung)	✔	Ja!
✘	offen	Konvergenz für **Regularisierungs**parameter$\to 0$	✔	Ja!
✔	Ja!	Numerische Studien und Experimente	✔	Ja!
✔	Ja!	Konvergenz für **Diskretisierungs**parameter$\to 0$	✘	offen

Zusammenfassung

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y,u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) \;=\; u$, $[y \in C_Y,\ u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Baňas, K., Prohl, '14]

Opt-TF

Min. $\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2$
u.d.N. **Thin-Film Gleichung**
& $y \geq C_0$ f.ü.

[K., Prohl, '14]

Neue Aspekte

- Geometrisches Funktional
- Rigorose Konvergenz der Diskretisierung
- Kopplung in Adjungiertengleichung

Neue Aspekte

- Degenerierte Gleichung
- Rigorose Konvergenz der Regularisierung
- Neue a-priori Abschätzungen, wenn rechte Seite in Gleichung

Zusammenfassung

Allgemeines Problem

Minimiere $J(y, u)$ u.d.N. $\mathrm{PDE}(y) \;=\; u$, $[y \in C_Y,\; u \in C_U]$.

Opt-NSE

Min. $\frac{1}{2}\|\rho - \hat{\rho}\|^2 + \int_0^1 \mathcal{H}^1(S_\rho) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|^2$
u.d.N. **Navier–Stokes Gleichung**.

[Baňas, K., Prohl, '14]

Opt-TF

Min. $\frac{1}{2}\|y - \hat{y}\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_x\|^2$
u.d.N. **Thin-Film Gleichung**
& $y \geq C_0$ f.ü.

[K., Prohl, '14]

Neue Aspekte

- Geometrisches Funktional
- Rigorose Konvergenz der Diskretisierung
- Kopplung in Adjungiertengleichung

Neue Aspekte

- Degenerierte Gleichung
- Rigorose Konvergenz der Regularisierung
- Neue a-priori Abschätzungen, wenn rechte Seite in Gleichung

Danke für die Aufmerksamkeit!